

# MET 11803

## Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

**Utlevering:** 20.12.2018 Kl. 09.00

**Innlevering:** 20.12.2018 Kl. 14.00

Vekt: 70% av MET 1180

Antall sider i oppgaven: 3 inkl. forsiden

Innføringsark: Ruter

Tillatte hjelpemidler: BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator.

Kontinuasjonstype Ordinær

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%).

**Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.**

### Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære systemet  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , hvor

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3 - a \end{pmatrix}$$

og  $a$  er en parameter.

- (a) **(6p)** Løs det lineære systemet når  $a = 1$ .
- (b) **(6p)** Finn determinanten  $\det(A)$ , og bestem verdiene av  $a$  slik at  $\det(A) = 0$ .
- (c) **(6p)** Bestem alle verdier av  $a$  slik at  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  har uendelig mange løsninger.
- (d) **(6p)** Regn ut  $A^2 - 3A$  når  $a = 1$ .

### Oppgave 2.

Regn ut disse integralene:

a) **(6p)**  $\int \frac{1}{x^2} dx$

b) **(6p)**  $\int \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$

c) **(6p)**  $\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

### Oppgave 3.

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

- (a) **(6p)** Regn ut  $f'(x)$ .
- (b) **(6p)** Vis at  $f$  er avtagende i definisjonsområdet  $D_f = (0, \infty)$ .
- (c) **(6p)** Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

- (d) **(6p)** Lag en grov skisse av grafen til  $f$ , basert på det du har funnet ut tidligere i oppgaven, og markér området som ligger mellom grafen til  $f$  og  $x$ -aksen (for  $x > 0$ ) på tegningen. Bestem så arealet til dette området.

### Oppgave 4.

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

- (a) **(6p)** Finn alle stasjonære punkter for  $f$ .
- (b) **(6p)** Regn ut Hesse-matrisen til  $f$ , og bruk den til å klassifisere de stasjonære punktene.
- (c) **(6p)** Avgjør om  $f$  har globale maksimums- eller minimumverdier.
- (d) **(6p)** Løs følgende Lagrange-problem:

$$\max f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^2 \quad \text{når} \quad x^2 + 2y^2 = 5$$

# Formelsamling

## 1 Finansmatematikk

**Geometriske rekker.** En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - k} \quad \text{når } |k| < 1$$

**Nåverdier.** Nåverdien  $K_0$  til en innbetaling  $K_n$  er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

## 2 Integrasjon

**Integrasjonsmetoder.**

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, dx = \int f(u) \, du$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px + q}{(x - a)(x - b)} \, dx = \int \left( \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right) \, dx$$

**Areal.** Regionen gitt ved  $f(x) \leq y \leq g(x)$  for  $a \leq x \leq b$  har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

## 3 Lineær algebra

**Cramers regel.** Et lineært system  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  der  $|A| \neq 0$  har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der  $A_i(\mathbf{b})$  er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne  $i$  fra matrisen  $A$  med  $\mathbf{b}$ .

## 4 Funksjoner i flere variable

**Annenderivert-testen.** Et stasjonært punkt  $(x^*, y^*)$  for funksjonen  $f(x, y)$  er et

- lokalt minimum om  $A > 0$  og  $AC - B^2 > 0$
- lokalt maksimum om  $A < 0$  og  $AC - B^2 > 0$
- sadelpunkt om  $AC - B^2 < 0$

når vi setter  $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$ ,  $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$  og  $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$ .

**Nivåkurver.** På nivåkurven  $f(x, y) = c$  er den deriverte  $y' = dy/dx$  gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**Totalderivasjon.** Når  $z = f(x, y)$ , og vi har  $x = x(t)$  og  $y = y(t)$ , så er den totalderiverte

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$