EKSAMENSOPPGAVE - Skriftlig eksamen

MET 11803
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	30.05.2018	Kl. 09.00
Innlevering:	30.05.2018	Kl. 14.00

Vekt:	70% av MET 1180
Antall sider i oppgaven:	4 inkl. forsiden
Innføringsark:	Ruter
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator

Eksamen	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	30. mai 2018 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra.

Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.

Oppgave 1.

Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = 0{,}60 \ln(1+x) + 0{,}40 \ln(1-x)$, definert for $0 \leq x < 1$.

(a) **(6p)** Finn maksimumspunktet $x = x^*$ og maksimumsverdien $y = f(x^*)$ til f.
(b) **(6p)** Avgjør om f er konveks eller konkav.
(c) **(6p)** Vis at $f(x) < 0$ når $x > 2x^*$.
(d) **(6p)** Skisser grafen til f.

Oppgave 2.

Regn ut disse integralene:

(a) **(6p)** $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
(b) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x$
(c) **(6p)** $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3.

Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 1$.
(b) **(6p)** Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.
(c) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.
(d) **(6p)** Regn ut matriseproduktet $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x}$ når $a = 1$.

Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen $f(x,y) = (x-y)\,e^{2xy}$.

(a) **(6p)** Regn ut de partiell-deriverte til f, og finn alle stasjonære punkter.
(b) **(6p)** Løs optimeringsproblemet $\max f(x,y)$ når $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$.

Oppgave 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y \quad \text{når} \quad 2x + y^2 = -1$$

(a) **(6p)** Lag en skisse av kurven $2x + y^2 = -1$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
(b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle punkter $(x,y;\lambda)$ som oppfyller betingelsene.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet og finn minimumsverdien, hvis den eksisterer.

Oppgave 6.

La p være en parameter med $0 < p < 1$, la $q = 1 - p$, og la $a,b > 0$ være positive parametre slik at $ap - bq > 0$. Vi betrakter funksjonen f gitt ved

$$f(x) = p\ln(1 + ax) + q\ln(1 - bx), \quad 0 \le x < 1$$

Bonus (6p) Finn maksimumspunktet $x = x^*$ til f, og forklar hva x^* representerer i optimeringsproblemet når funksjonen f og dens parametre tolkes som angitt nedenfor.

Tolkning av funksjonen f:
Vi deltar i et spill der vi vinner a ganger innsatser med sannsynlighet p, og taper b ganger innsatsen med sannsynlighet q. Om vi deltar i dette spillet n ganger, med uavhengige utfall, og hver gang satser andelen x av vår kapital, vil startkapitalen X_0 vokse til kapitalen X_n, der X_n er en stokastisk variabel, og $f(x)$ er forventningsverdien

$$f(x) = E\left[\ln\left(X_n/X_0\right)^{1/n}\right]$$

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \le y \le g(x)$ for $a \le x \le b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$