Løsning	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	30. mai 2017 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi lar $p = 0{,}60$ og $q = 0{,}40$, og skriver funksjonen som $f(x) = p\ln(1+x) + q\ln(1-x)$ for å forenkle skrivemåten. Funksjonen f har derivert

$$f'(x) = \frac{p}{1+x} - \frac{q}{1-x} = \frac{p(1-x) - q(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{p - q - x(p+q)}{(1+x)(1-x)} = \frac{p-q-x}{(1+x)(1-x)}$$

siden $p + q = 1$. Dermed er $f'(x) = 0$ når $x = p - q$. Siden nevneren er positiv når $0 \leq x < 1$, er $f'(x) > 0$ for $x < p - q$ og $f'(x) < 0$ for $x > p - q$. Dermed blir $x^* = p - q = 0{,}20$ et globalt maksimumspunktet for f, og maksimumsverdien til f er

$$f(x^*) = f(0{,}20) = 0{,}60\ln(1{,}20) + 0{,}40\ln(0{,}80) \approx 0{,}0201$$

(b) Vi har at

$$f''(x) = -\frac{p}{(1+x)^2} - \frac{q}{(1-x)^2}$$

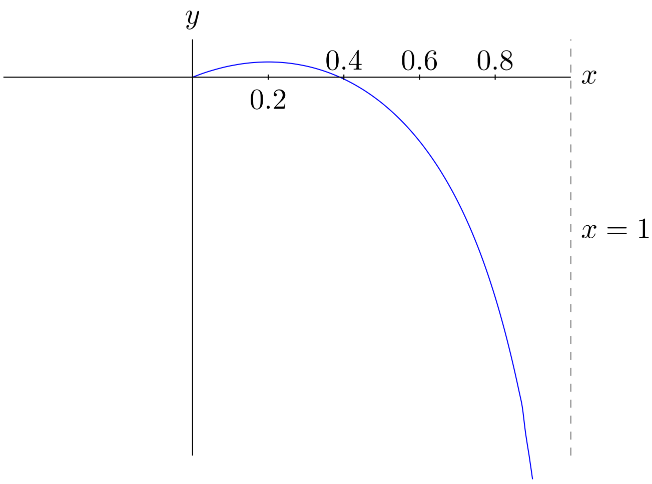
Siden $p{,}q > 0$ og $(1+x)^2, (1-x)^2 > 0$, ser vi at $f''(x) < 0$ for alle x. Dette betyr at f er konkav.

(c) Fra (a) ser vi at f er avtagende for $x > x^* = 0{,}20$. Vi har dessuten at

$$f(2x^*) = f(0{,}40) = 0{,}60\ln(1{,}40) + 0{,}40\ln(0{,}60) \approx -0{,}0024 < 0$$

Det betyr at $f(x) < 0$ for alle $x > 2x^* = 0{,}40$.

(d) I figuren nedenfor viser vi grafen til f. Det bør framgå av figuren (uten at tallverdiene trenger være helt nøyaktige) at $f(0) = 0$, at $f(0{,}20) \approx 0{,}0201 > 0$, at $f(0{,}40) = -0{,}0024 < 0$, at f er voksende for $x < 0{,}20$ og avtagende for $x > 0{,}20$, og at f er konkav.



Oppgave 2.

(a) Vi løser dette integralet ved å bruke at $x\sqrt{x} = x^{3/2}$:

$$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{5/2} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

(b) Vi løser integralet ved substitusjonen $u = x^2 - 3x - 4$. Dette gir $\mathrm{d}u = (2x-3)\cdot \mathrm{d}x$, og dermed

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-3}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2x-3} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x^2-3x-4| + C$$

Alternativt kan vi løse integralet ved delbrøksoppspaltning. Siden $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$, setter vi

$$\frac{2x-3}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplikasjon med fellesnevner gir $2x-3 = A(x+1)+B(x-4)$, og innsetting av $x=-1$ og $x=4$ gir $B=1$ og $A=1$. Dermed får vi

$$\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-4| + \ln|x+1| + C$$

(c) Vi løser integralet ved substitusjonen $u=\sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$, og dermed

$$\int \ln\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln(u)\cdot 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u = \int 2u\ln(u)\,\mathrm{d}u$$

Vi løser dette integralet ved delvis integrasjon, og får

$$\int 2u\ln(u)\,\mathrm{d}u = u^2\ln(u) - \int u^2\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = u^2\ln(u) - \frac{1}{2}u^2 + C = x\ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + C$$

Det er også mulig å løse integralet ved å bruke at $\ln\sqrt{x} = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln x$.

Oppgave 3.

(a) Vi løser det lineære systemet for $a=1$ ved Gauss-eliminasjon. Vi finner først den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Deretter finner vi en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner. Vi starter med å bytte om første og andre rad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har uendelig mange løsning, med én fri variabel z, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon. Andre likning gir $-y = 2z+1$, eller $y=-2z-1$. Første likning gir $x = -y-z+1 = 2z+1-z+1 = z+2$. Dermed er løsningen $(x,y,z) = (z+2, -2z-1, z)$ med z fri.

(b) Vi regner ut determinanten til A, og velger å utvikle $|A|$ langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 2(2-a^2) - a(2a) = 4-2a^2-2a^2 = 4-4a^2 = 4(1-a)(1+a)$$

Dermed er $|A|=0$ hvis $a=1$ eller $a=-1$.

(c) Vi vet fra teori at det lineære systemet har én løsning hvis $|A|\neq 0$, og ingen eller uendelig mange løsninger hvis $|A|=0$. I dette tilfellet er $|A|=0$ for $a=\pm 1$ fra (b). For $a=1$ vet vi at det er uendelig mange løsninger fra (a). Vi sjekket tilfellet $a=-1$ ved å løse det lineære systemet, som har utvidet matrise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Vi starter Gauss-eliminasjonen ved å bytte om de to første radene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Vi ser at dette systmet ikke har noen løsninger, da det har en pivot-posisjon i siste kolonne. Vi konkluderer med at systemet har uendelig mange løsninger kun for $a=1$. I de andre tilfellene er det ingen løsninger ($a=-1$) eller én løsning ($a\neq\pm 1$).

(d) Når $a = 1$, er uttrykket $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x}$ gitt ved

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x + y & x + y + z & y + 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \big((2x + y)x + (x + y + z)y + (y + 2z)z\big) \\
&= \big(2x^2 + xy + xy + y^2 + yz + yz + 2z^2\big) \\
&= \big(2x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + 2z^2\big)
\end{aligned}$$

Oppgave 4.

(a) For å finne de partiellderiverte til $f(x,y) = (x-y)\,e^{2xy}$, bruker vi produktregelen for derivasjon, samt kjerneregelen med kjerne $u = 2xy$:

$$\begin{aligned}
f'_x &= 1 \cdot e^u + (x - y)e^u \cdot 2y = (1 + 2xy - 2y^2)e^{2xy} \\
f'_y &= -1 \cdot e^u + (x - y)e^u \cdot 2x = (-1 + 2x^2 - 2xy)e^{2xy}
\end{aligned}$$

Førsteordensbetingelsene er $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir

$$\begin{aligned}
(1 + 2xy - 2y^2)e^{2xy} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1 + 2xy - 2y^2 = 0 \\
(-1 + 2x^2 - 2xy)e^{2xy} = 0 \quad &\Rightarrow \quad -1 + 2x^2 - 2xy = 0
\end{aligned}$$

siden $e^{2xy} \neq 0$. Legger vi sammen de to likningene, får vi $2x^2 - 2y^2 = 0$, eller $x^2 = y^2$. Alternativt kan vi løse første likning for $2xy$, og sette uttrykket inn i andre likning, med samme resultat. Likningen $x^2 = y^2$ gir enten $x = y$ eller $x = -y$. Med $x = y$ gir første likning $2x^2 - 2x^2 = -1$, eller $0 = -1$, og dette er ikke mulig. Med $x = -y$, gir første likning $-2y^2 - 2y^2 = -1$, eller $-4y^2 = -1$. Dette gir $y^2 = 1/4$, og dermed $y = 1/2$ eller $y = -1/2$. Dette gir to løsninger

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

som er de stasjonære punktene til f.

(b) Det tillatte området D er et kvadrat, og det er ingen stasjonære punkter for f i det indre, siden $x < 0$ eller $y < 0$ for begge stasjonære punkter i (a). Siden D er lukket og begrenset, har f et maksimum på D, og det må ligge på en av sidekantene. Vi sjekker derfor disse:

- Sidekanten med $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$: Her er $f(x,y) = f(0,y) = -ye^0 = -y$. Denne funksjonen avtar med y, og den største verdien har vi for $y = 0$, med $f(0,0) = 0$.
- Sidekanten med $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$: Her er $f(x,y) = f(x,0) = xe^0 = x$. Denne funksjonen vokser med x, og den største verdien har vi for $x = 1$, med $f(1,0) = 1$.
- Sidekanten med $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$: Her er $f(x,y) = f(1,y) = (1 - y)e^{2y}$. Denne funksjonen har derivert

  $$\big((1 - y)e^{2y}\big)' = -1e^{2y} + (1 - y)e^{2y} \cdot 2 = (1 - 2y)e^{2y}$$

  Dermed er funksjonen først voksende, har et maksimum når $1 - 2y = 0$, det vil si $y = 1/2$, og deretter er den avtagende. Den største verdien er $f(1,1/2) = 1/2e^1 = e/2 \approx 1{,}359$.
- Sidekanten med $y = 1$, $0 \leq x \leq 1$: Her er $f(x,y) = f(x,1) = (x - 1)e^{2x}$. Denne funksjonen har derivert

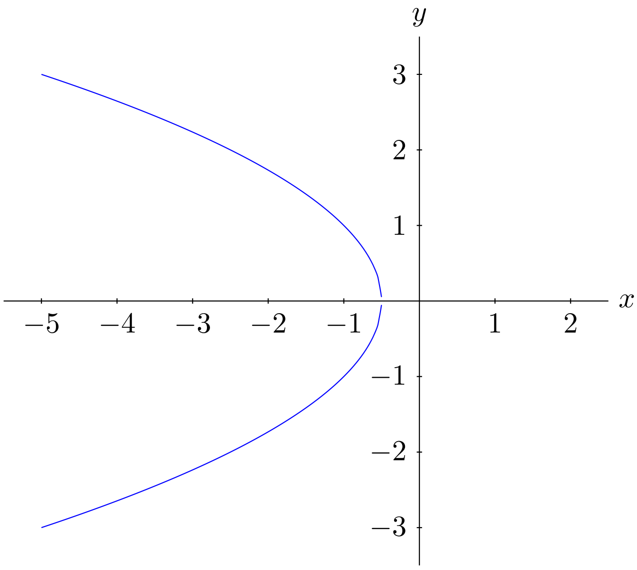
  $$\big((x - 1)e^{2x}\big)' = 1e^{2x} + (x - 1)e^{2x} \cdot 2 = (2x - 1)e^{2x}$$

  Dermed er funksjonen først avtagende, har et minimum når $2x - 1 = 0$, det vil si $x = 1/2$, og deretter er den voksende. Her er $x = 1/2$ et minimum, og den største verdien har vi enten for $x = 0$, med $f(0,1) = -1$, eller $x = 1$, med $f(1,1) = 0$. Når vi sammenligner disse verdiene, ser vi at den største verdien på denne kanten er $f(1,1) = 0$.

Blant de fire sidekantene, er den største verdien $f(1,1/2) = e/2 \approx 1{,}359$. Dette er maksimumsverdien til f.

Oppgave 5.

(a) En skisse av kurven $2x + y^2 = -1$ er vist nedenfor. Siden $y^2 = -1 - 2x$, ser vi at $-1 - 2x \geq 0$, eller $x \leq -1/2$. Men det finnes ingen nedre grense for x blant punkter (x,y) på kurven. Det kan vi se ved å la $x \to -\infty$ i likningen over, som har to løsninger for y for hver verdi av x med $x < -1/2$, eller fra figuren. Derfor er kurven ikke en begrenset mengde.



(b) Lagrange-problemet har Lagrange-funksjon

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 - 4y - \lambda(2x + y^2)$$

Lagrange-betingelsene er de to førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen, gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 2x - \lambda \cdot 2 = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 2y - 4 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ 2x + y^2 &= -1 \end{aligned}$$

Første likning gir $2x = 2\lambda$, eller $x = \lambda$, og den andre likningen gir med $\lambda = x$ at

$$2y - 4 - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2y-4}{2y} = \frac{y-2}{y}$$

Setter vi dette inn i bibetingelsen, får vi

$$2 \cdot \frac{y-2}{y} + y^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2(y-2) + y^3 = -y$$

ved multiplikasjon med fellesnevner. Dette gir likningen $y^3 + 3y - 4 = 0$, og vi ser ved innsetting at $y = 1$ er en løsning. Eventuelle andre løsninger finner vi ved polynomdivisjon, som gir

$$(y-1)(y^2 + y + 4) = 0$$

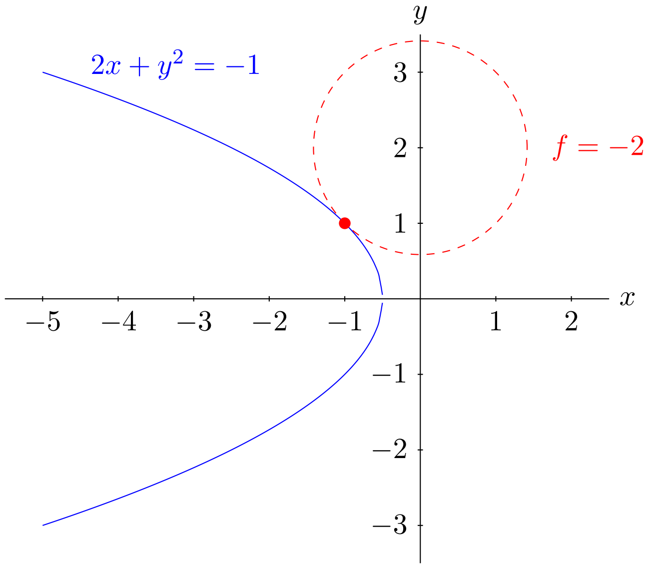
Eneste løsninger er $y = 1$, siden $y^2 + y + 4 = 0$ ikke har løsninger, og dette gir $x = -1$ og $\lambda = -1$. Eneste punkt som oppfyller alle Lagrange-betingelsene blir dermed

$$(x,y;\lambda) = (-1,1;-1)$$

(c) Vi har et kandidatpunkt for minimum, punktet $(x,y) = (-1,1)$, med $f(-1,1) = -2$. Men vi kan ikke bruke ekstremverdisetningen til å konkludere at dette er minimum, siden kurven $2x + y^2 = -1$ ikke er en begrenset mengde. Istedet ser vi på nivåkurvene $f(x,y) = c$, som har likning

$$x^2 + y^2 - 4y = c \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-2)^2 = c + 4$$

Dette er en sirkel med sentrum i $(0,2)$ og radius $r = \sqrt{c+4}$ når $c \geq -4$. Kandidatpunktet $(-1,1)$ ligger på sirkelen med redius $\sqrt{2}$ siden $c = f(-1,1) = -2$ i dette punktet. Vi viser nivåkurvene for $c = -2$ (rød kurve) i figuren nedenfor, sammen med kurven $2x + y^2 = -1$ av tillatte punkter (blå kurve).



Vi ser at dersom $r < \sqrt{2}$ (mindre radius enn den som er vist), vil sirkelen ikke lenger treffe den blå kurven. Det betyr at hvis $r = \sqrt{c+4} < \sqrt{2}$, er det ingen tillatte punkter på nivåkurven $f(x,y) = c$. Dette skjer dersom

$$\sqrt{c+4} < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c + 4 < 2 \quad \Rightarrow \quad c < -2$$

Dette viser at $c = -2$ er den minste mulige verdien for f blant tillatte punkter (den blå kurven). Lagrange-problemet har løsning $(x,y) = (-1,1)$, med minimumsverdi $f(-1,1) = -2$.

Oppgave 6.

Funksjonen f har derivert gitt ved

$$f'(x) = \frac{ap}{1+ax} - \frac{bq}{1-bx} = \frac{ap(1-bx) - bq(1+ax)}{(1+ax)(1-bx)} = \frac{ap - bq - x(abp + abq)}{(1+ax)(1-bx)}$$
$$= \frac{ap - bq - abx(p+q)}{(1+ax)(1-bx)} = \frac{ap - bq - abx}{(1+ax)(1-bx)}$$

siden $p + q = 1$. Merk at nevneren er positiv, og at $ap - bq > 0$, $ab > 0$ ved antagelsene som er gjort for parametrene. Dermed har vi

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (ap - bq) = abx \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{ap - bq}{ab}$$

Ettersom $f'(x) > 0$ for $x < x^*$ og $f'(x) < 0$ for $x > x^*$, så er $x = x^*$ et globalt maksimum for f. For hver verdi av x, så angir $f(x)$ den forventede eksponensielle veksten per spill, slik at $f(x) = r$ svarer til at

$$X_n = X_0 \cdot e^{rn}$$

etter n spill, og $x = x^*$ er den optimale andelen av kapitalen å satse i hvert spill når vi ønsker å maksimere den forventede eksponensielle veksten per spill.