

MET 11803

Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering: 30.05.2017 Kl. 09.00

Innlevering: 30.05.2017 Kl. 14.00

Vekt: 70% av MET 1180

Antall sider i oppgaven: 4 inkl. forsiden

Innføringsark: Ruter

Tillatte hjelpemidler: BI-godkjent eksamenskalkulator.

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra. **Alle svar skal begrunnes.**

OPPGAVE 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen A og vektorene \mathbf{x} og \mathbf{b} er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3+a \\ a^2 \\ 3-a \end{pmatrix}$$

Vi betrakter a som en parameter og x, y, z som variable.

- (a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 1$.
- (b) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 1$, og bruk A^{-1} til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
- (c) **(6p)** Bestem a slik at det lineære systemet har eksakt én løsning.
- (d) **(6p)** Bestem a slik at det lineære systemet ikke har noen løsninger.

OPPGAVE 2.

Regn ut integralene:

$$(a) \text{ (6p)} \int_0^1 \frac{3}{(2-x)^4} dx \quad (b) \text{ (6p)} \int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} dx \quad (c) \text{ (6p)} \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

OPPGAVE 3.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ definert for $x > 0$.

- (a) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f , hvis de eksisterer.
- (b) **(6p)** Tegn en grov skisse av området R i første kvadrant begrenset av grafen til f , x -aksen og $x = 1$, og regn ut arealet til dette området.

OPPGAVE 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x, y) = \frac{2x + 3y - 6}{xy}$$

- (a) **(6p)** Regn ut f'_x og f'_y , og finn eventuelle stasjonære punkter for f .
- (b) **(6p)** Klassifiser de stasjonære punktene som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.
- (c) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f .
- (d) **(6p)** Vis at nivåkurven $f(x, y) = 5$ skjærer linjen $y = 1$ i ett punkt, og finn tangenten til nivåkurven i dette punktet.

OPPGAVE 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 - 4y^3 \quad \text{når} \quad x^2 + y^2 = 25$$

- (a) **(6p)** Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2 + y^2 = 25$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
- (b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y; \lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.
- (c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet.

Vi endrer bibetingelsen i Lagrange-problemet til $x^2 + y^2 = 26$.

- (d) **Bonus (6p)** Estimer maksimums- og minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, dx = \int f(u) \, du$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px + q}{(x - a)(x - b)} \, dx = \int \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right) dx$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med \mathbf{b} .

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x, y)$ er et

- lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
- lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
- sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x, y) = c$ er den deriverte $y' = dy/dx$ gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x, y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$