

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

Finn det naturlige definisjonsområdet D_f og verdimengden V_f til f :

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$ c) $f(x,y) = (2x-y)^{-3/2}$ d) $f(x,y) = 17x^{1.2}y^{3.4}$

Oppgave 2.

Vi ser nivåkurven $f(x,y) = c$ til en funksjon $f(x,y)$. Tegn inn nivåkurvene for de oppgitte verdiene av c i samme koordinatsystem, og avgjør hva slags kurve vi får når vi lar c være en hvilken som helst verdi:

a) $f(x,y) = 12x - 3y$ og $c = -3, 0, 3$ b) $f(x,y) = xy$ og $c = -1, 0, 1$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$ og $c = -9, -5, -1$ d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ og $c = -2, -1, 0, 1$

Oppgave 3.

Bruk nivåkurvene $f(x,y) = c$ fra Oppgave 2 til å avgjøre om funksjonen har maksimums- eller minimumsverdier:

a) $f(x,y) = 12x - 3y$ b) $f(x,y) = xy$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$ d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

Oppgave 4.

Beskriv grafen til $f(x,y) = 3x - 4y + 1$ geometrisk. Med geometrisk beskrivelse mener vi for eksempel: *Grafen til $f(x) = 3 - 2x$ er en rett linje med stigningstall -2 som skjærer y -aksen i $y = 3$, altså en presis geometrisk beskrivelse uten bruk av likninger eller liknende.*

Oppgave 5.

Finn de partiellderiverte f'_x og f'_y når

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$ h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 6.

Finn Hesse-matrisen $H(f)$, og regn ut $H(f)(1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$ h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 7.

Finn de stasjonære punktene til f :

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 8.

Finn alle stasjonære punkter:

a) $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$

b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$

c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Oppgave 9.

Repetisjonsoppgave: Regn ut den deriverte til funksjonen $f(x)$:

a) $f(x) = \int_0^x 2ze^{-z^2} dz$

b) $f(x) = \int_0^x e^{-z^2} dz$

c) $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} 2ze^{-z^2} dz$

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*

Oppgaveboken [O]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver: [E] 7.1.1 - 7.1.4, 7.2.1 - 7.2.3, 7.3.1 - 7.3.5

Fullstendig løsning: Se [O] Kap 7.1 - 7.3

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $D_f = \mathbb{R}^2, V_f = \mathbb{R}$

b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \geq 0\}, V_f = [0, \infty)$

c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y > 0\}, V_f = (0, \infty)$

d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}, V_f = [0, \infty)$

Oppgave 2.

a) Rett linje med stigningstall 4 som skjærer y -aksen i $y = -c/3$

b) Hyperbel $y = c/x$ hvis $c \neq 0$, og de to aksene hvis $c = 0$

c) Sirkel med radius $\sqrt{c+5}$ og sentrum $(-1,2)$ hvis $c > -5$, ett punkt $(-1,2)$ hvis $c = -5$, ingen punkter ellers

d) Ellipser med sentrum i $(1,0)$ med halvaksler $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \sqrt{c+1}/2$ når $c > -1$, ett punkt $(1,0)$ hvis $c = -1$, og ingen punkter ellers

Oppgave 3.

- a) Hverken maksimum eller minimum
 b) Hverken maksimum eller minimum
 c) Ikke maksimum men minimumsverdien er $f_{min} = -5$
 d) Ikke maksimum men minimumsverdien er $f_{min} = -1$

Oppgave 4.

Grafen er planet som skjærer z -aksen i $z = 1$ og har normalvektor $(3, -4, -1)$.

Oppgave 5.

- a) $f'_x = 2, f'_y = 3$ b) $f'_x = 2x, f'_y = 2y$ c) $f'_x = 8x - 6y, f'_y = -6x + 18y$
 d) $f'_x = 2x - 2, f'_y = 8y$ e) $f'_x = 3x^2 - 3y, f'_y = -3x + 3y^2$ f) $f'_x = -3x^2 + 3, f'_y = 2y$
 g) $f'_x = 2x(y^2 - 1), f'_y = 2y(x^2 - 1)$ h) $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Oppgave 6.

- a) $H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
 c) $H(f) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$ d) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
 e) $H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ f) $H(f) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
 g) $H(f) = \begin{pmatrix} 2(y^2 - 1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2 - 1) \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
 h) $H(f) = (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}, H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$

Oppgave 7.

- a) ingen b) (0,0) c) (0,0) d) (1,0)
 e) (0,0), (1,1) f) (1,0), (-1,0) g) (0,0), ($\pm 1, \pm 1$) h) ingen

Oppgave 8.

- a) (0,0) b) (0,0), (0, -1), (3/25, -3/5) c) (0,0)

Oppgave 9.

- a) $2xe^{-x^2}$ b) e^{-x^2} c) e^{-x}