

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

Lag figur som viser det bestemte integralet som et areal. Bestem arealet ved integrasjon og ved å bruke figuren.

a) $\int_0^4 3 \, dx$

b) $\int_0^8 (10 + 3x) \, dx$

c) $\int_{-2}^2 |x| \, dx$

d) $\int_{-1}^3 |x| - x \, dx$

Oppgave 2.

Finn arealet til området under grafen til funksjonen f på det angitte intervallet, og vis dette området på figur:

a) $f(x) = x^2, [-1,1]$

b) $f(x) = x^3 + 3x - 4, [1,4]$

c) $f(x) = x \ln(x), [1,2]$

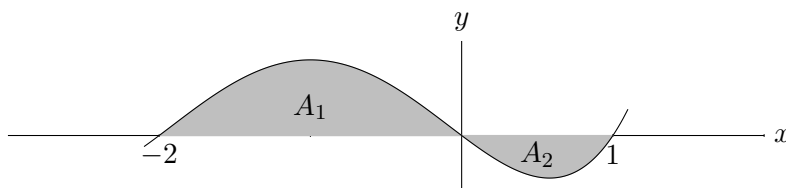
d) $f(x) = xe^{-x}, [0,1]$

e) $f(x) = \frac{-7}{x^2 - 5x - 6}, [0,5]$

f) $f(x) = 1/x^2, [1, \infty)$

Oppgave 3.

Grafen til en funksjon f er vist i figuren nedenfor. Bestem arealet A_1 når arealet $A_2 = 22/15$ og $\int_{-2}^1 f(x) \, dx = \frac{18}{5}$.



Oppgave 4.

Finn arealet til området R , og vis R på figur:

a) R er området begrenset av grafen til $y = \ln(2 + x)$, linjen $y = 2$, og y -aksen.

b) R er området begrenset av grafene til $y = x$ og $y = x^2$.

Oppgave 5.

Et glass har høyde $H = 10$, og er formet slik at det horisontale tverrsnittet i høyde h er en sirkel med radius $r = 0.10h^2$ når $0 \leq h \leq H = 10$. Lag en figur som viser glasset sett fra siden, og regn ut volumet som glasset rommer. Høyden H og radius r er oppgitt i cm.

Oppgave 6.

Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntektstrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{t/7}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter t år. Regn ut den samlede inntekten i løpet av de neste 10 årene. Hvor mye av denne inntektsstrømmen kommer i løpet av de første to årene?

Oppgave 7.

Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntektstrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{t/7}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter t år. Regn ut nåverdien av inntektsstrømmen i løpet av de neste 10 årene når vi bruker kontinuerlig forrentning og diskonteringsrente $r = 10\%$. Hvor stor del av denne nåverdien stammer fra leien i løpet av de første to årene?

Oppgave 8.

Den (omvendte) etterspørselsfunksjonen $p = f(q)$ og den (omvendte) tilbudsfunksjonen $p = g(q)$ er gitt ved

$$f(q) = 200 - 2q \quad \text{og} \quad g(q) = q + 20$$

Finn likevektsprisen. Beregn konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet, og vis på figur.

Oppgave 9.

Den (omvendte) etterspørselsfunksjonen $p = f(q)$ og den (omvendte) tilbudsfunksjonen $p = g(q)$ er gitt ved

$$f(q) = \frac{6000}{q + 50} \quad \text{og} \quad g(q) = q + 10$$

Finn likevektsprisen. Beregn konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet, og vis på figur.

Oppgave 10.

En kontinuerlig stokastisk variabel X har tettsfunksjon $f(x) = 2e^{-2x}$, definert på intervallet $[0, \infty)$. Bestem følgende sannsynligheter:

a) $p(0 \leq X \leq 1)$

b) $p(1 \leq X \leq 2)$

c) $p(X \geq 1)$

Oppgave 11.

Et toaletttrull har indre radius $r = 2$ cm og ytre radius $R = 7$ cm. Tykkelsen på papiret er 0.5 mm. Hva er lengden på papiret når vi har rullet den helt ut?

Oppgave 12.

Skriv ned en sum (basert på $n = 10$ delintervaller) som tilnærmer det bestemte integralet $\int_0^1 (1 - x^2) dx$, og vis det bestemte integralet og tilnærmingen som arealer i en figur.

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*

Oppgaveboken [O]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver: [E] 5.6.3 - 5.6.5, 5.7.1 - 5.7.6

Fullstendig løsning: Se [O] Kap 5.6 - 5.7

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

- a) 12 b) 176 c) 4 d) 1

Oppgave 2.

- a) $2/3$ b) $297/4 = 74.25$ c) $2 \ln 2 - 3/4$
d) $1 - 2/e$ e) $2 \ln 6$ f) 1

Oppgave 3.

$$A_1 = 76/15$$

Oppgave 4.

- a) $e^2 - 6 + \ln(4)$ b) $1/6$

Oppgave 5.

$$200\pi \approx 628 \text{ (eller 0.63 liter)}$$

Oppgave 6.

Samlet inntekt er $2100(e^{10/7} - 1) \approx 6\,663$ millioner kr. Av dette stammer $2100(e^{2/7} - 1) \approx 694$ millioner kr fra leie de første to årene.

Oppgave 7.

Nåverdi er $7000(e^{3/7} - 1) \approx 3\,745$ millioner kr. Av dette stammer $7000(e^{3/35} - 1) \approx 626$ millioner kr fra leie de første to årene.

Oppgave 8.

Likevektsprisen $p^* = 80$, konsumentoverskuddet er 3 600 og produsentoverskuddet er 1 800.

Oppgave 9.

Likevektsprisen $p^* = 60$, konsumentoverskuddet er $6000 \ln(2) - 3000 \approx 1159$ og produsentoverskuddet er 1250.

Oppgave 10.

- a) $1 - 1/e^2$ b) $1/e^2 - 1/e^4$ c) $1/e^2$

Oppgave 11.

$$900\pi \approx 28.3 \text{ m}$$

Oppgave 12.

Hvis vi deler intervallet $[0,1]$ inn i $n = 10$ like store delintervall, så blir delepunktene $x_i = i/10$ for $i = 0, 1, 2, \dots, 10$. Det vil si at $x_0 = 0$, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 2/10$ og så videre. Det bestemte integralet er arealet under $f(x) = 1 - x^2$ på intervallet $[0,1]$. Vi kan tilnærme dette som arealet av ti rektangler, gitt ved summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^9 f(x_i) \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=0}^9 (1 - (i/10)^2) \cdot \frac{1}{10} = (1 + (1 - 1/100) + (1 - 4/100) + \dots + (1 - 81/100)) \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(10 - \frac{0 + 1 + 4 + \dots + 81}{100} \right) = 0.715 \end{aligned}$$

Summen er vist i figuren nedenfor. Det bestemte integralet er arealet under den blå kurven, altså litt mindre enn 0.715. Vi har valgt å bruke funksjonsverdien i startpunktet i hvert delintervall som høyden på våre rektangler (det er også mulig å bruke sluttpunktet, eller gjennomsnitt av funksjonsverdi i start- og sluttpunkt. Uansett blir tilnærmingen bedre jo større n er, og grenseverdien går mot det virkelige arealet når $n \rightarrow \infty$).

