	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Nødvendige betingelser for max/min	[E] 7.7	[E] 7.7.3 - 7.7.6
2	Degenerert bibetingelse	[E] 7.7	[E] 8.17
3	Tolkning av Lagrange-mulitplikatoren	[E] 7.7	[O] 10.20

Rep.foreles. 13. mai 09–12 Eks. 05/2025 + andre temaer
Eksamen 22. mai 09–14

1 Nødvendige betingelser for max/min

(*) max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$ Lagrange-problem

Metode: $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot (g(x,y) - a)$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ førsteordens-betingelser (FOC)}$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = -(g(x,y) - a) = 0 \qquad g(x,y) = a \text{ (bibetingelsen)} = C$$

FOC+C Lagrange-betingelsene

Teorem

Hvis (x^*, y^*) er max/min i (*), så har vi enten

i) det fins λ slik at $(x^*, y^*; \lambda)$ oppfyller FOC+C (ordinære kandidatpkt)

eller

ii) (x^*, y^*) er et tillatt pkt med degenerert bibetingelse, (unntakspkt)

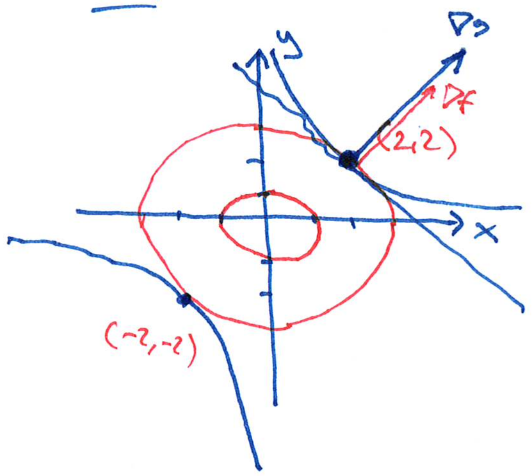
dvs $\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{cases}$

Merk:

FOC $\iff$ $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ $\iff$ Nivåkurven $f(x,y) = c$ og $D: g(x,y) = a$ møtes tangentielt

$(L'_x = L'_y = 0)$

Eks: max/min $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $xy = 4$



$D: g(x,y) = a$

$xy = 4$

$D: xy = 4$

$y = 4/x$

Nivåkurver for f:

$f(x,y) = c$

$x^2 + y^2 = c$

sirkel, sentrum $(0,0)$, radius $\sqrt{c}$ $(c > 0)$

(2) Degenerert bibetingelse

Merk: Tillatte pkt med degenerert bibetingelse

$g(x,y) = a$ $\quad xy = 4$

$g'_x = g'_y = 0$ $\quad \nabla g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lagrange's multipl. metode fungerer ikke for pkt med $\nabla g = 0$.

Tangent til $g(x,y) = a$ har stigningstall $-\frac{g'_x}{g'_y}$, dvs

$\nabla g = 0 \iff$ pkt på D uten entydig tangent

Sjekk: $xy = 4$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= y = 0 \\ g'_y &= x = 0 \end{aligned}\right\} \quad (x,y) = (0,0), \quad 0 \cdot 0 \neq 4$$

ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse

Eks: max/min $f(x,y)=y$ når $x^2+y^3=0$

$$L = y - \lambda(x^2+y^3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= -\lambda\cdot 2x = 0 \\ L'_y &= 1-\lambda\cdot 3y^2 = 0 \\ & x^2+y^3 = 0 \end{aligned}} \Rightarrow \lambda\cdot x = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ eller } x = 0$$

$\lambda = 0$	$x = 0$
$1-0=0$	$y^3=0$
umulig	$y=0$
	$1-\lambda\cdot 0 = 0$
	umulig

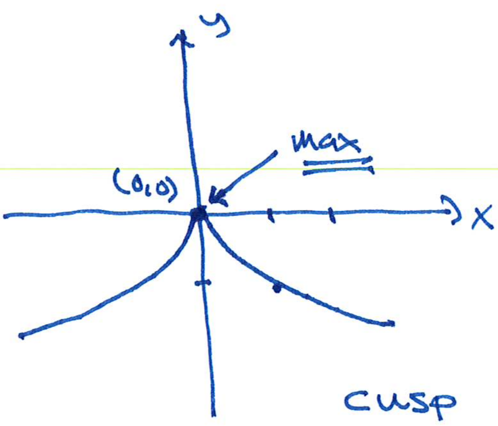
ingen ordinære kand.pkt

Degenerert bibetingelse:

$$g(x,y) = x^2+y^3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= 2x = 0 \\ g'_y &= 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (x,y)=(0,0) \quad 0^2+0^3=0 \text{ ok}$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ tillatt pkt med degenerert bibetingelse
max



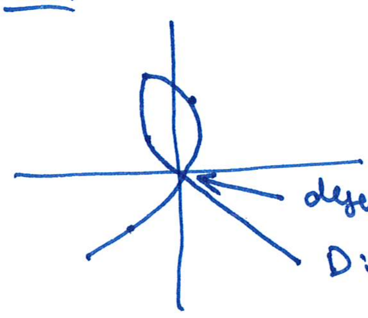
cusp

$D: x^2+y^3=0$

$$y^3 = -x^2$$

$$y = \sqrt[3]{-x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$$

Eks:



degenerert bibet.

$D: g(x,y)=a$

(3) Tolkning av Lagrange-multiplikatoren λ

Eks: max/min $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$ når $2x - y = 1$

Lagrange:

$$L = x^2 - 4xy + y^2 - \lambda(2x - y - 1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 2x - 4y - \lambda \cdot 2 = 0 \quad (1)\\ L'_y &= -4x + 2y - \lambda(-1) = 0 \quad (2)\\ 2x - y &= 1 \quad (3)\end{aligned}}$$

(2) $\lambda = \underline{4x - 2y}$

(1) $2x - 4y - 2(4x - 2y) = 0$

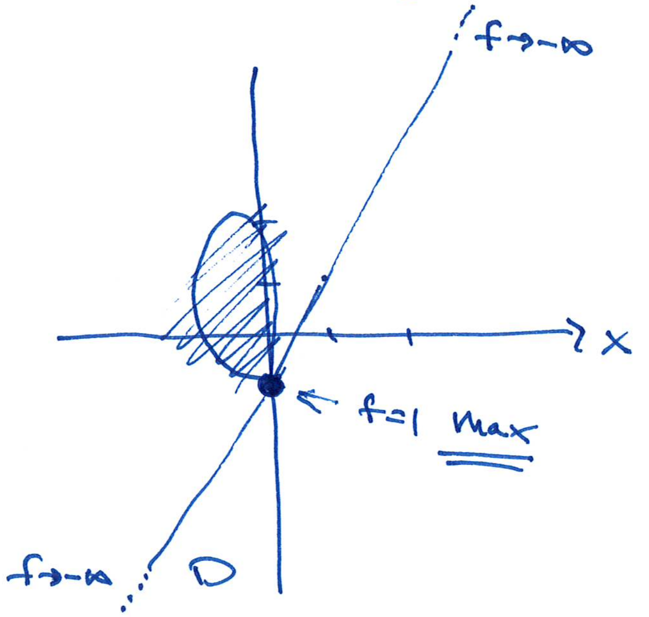
$2x \cancel{-4y} - 8x \cancel{+4y} = 0$

$-6x = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

(3) $2 \cdot 0 - y = 1 \quad \underline{\underline{y = -1}}$

(1) $\lambda = 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$



$D: 2x - y = 1$

$y = 2x - 1$

D er ikke begrenset

ingen tillatte pkt med dagen.

lukket sida D er en linje

Kandidatpkt: $(x, y; \lambda) = \underline{(0, -1; 2)}$ $f = 1$

Test: $\left.\begin{array}{l} x \to \infty \\ y = 2x - 1 \end{array}\right\}$ $f = x^2 - 4xy + y^2$

$= x^2 - 4x(2x-1) + (2x-1)^2 = -3x^2 + \ldots$

$\to -\infty$

$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \\ y = 2x - 1 \end{array}\right\}$ $f = -3x^2 + \ldots \to -\infty$

Konklusjon: $f_{max} = \underline{\underline{1}}$ (max verdi) $\quad (x^*, y^*) = \underline{\underline{(0, -1)}}$ (max-pkt) $\quad \lambda = 2$

Tolkning av λ: Marginal endring i max-verdi (min-verdi) per endring i a, konstanten i bibetingelsen $g(x, y) = a$.

$\max f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$ når $2x - y = \underline{\underline{1}}$ $\leftarrow f_{max} = 1$

$\max f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$ når $2x - y = 1.5$ $\leftarrow f_{max} \simeq 2$

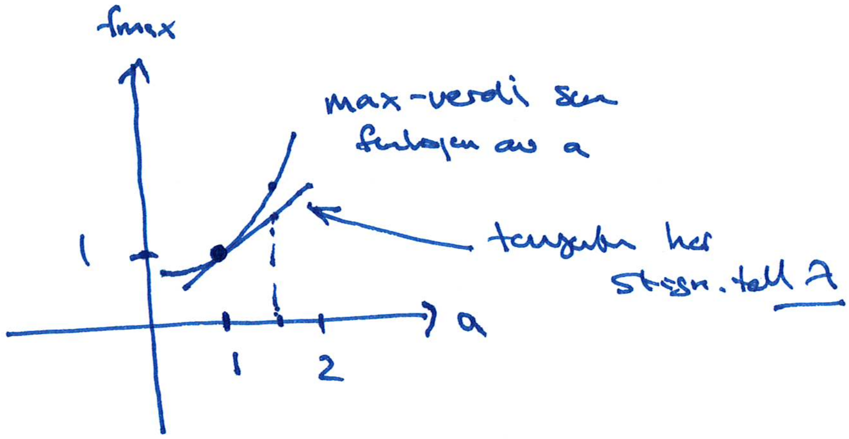
$f_{max} \simeq 1 + 0.5 \cdot 2$

f_{max}: ny max-verdi $a = 1.5$

1: gamal max-verdi $a = 1$

0.5: Δa

2: λ



Oppg ark 47, 7

max $f(x,y) = x+y$ når $x^3 - 3xy + y^3 = 0$

Vi antar at det fins et maks.

$$L = x + y - \lambda(x^3 - 3xy + y^3)$$

$$L'_x = 1 - \lambda(3x^2 - 3y) = 0 \quad (1)$$

$$L'_y = 1 - \lambda(-3x + 3y^2) = 0 \quad (2)$$

$$x^3 - 3xy + y^3 = 0 \quad (3)$$

(1) $1 = \lambda(3x^2 - 3y)$

$$\lambda = \frac{1}{3x^2 - 3y} \quad (3x^2 - 3y \neq 0)$$

(2) $\lambda = \dfrac{1}{-3x + 3y^2} \quad (-3x + 3y^2 \neq 0)$

$$\frac{1}{3x^2 - 3y} = \frac{1}{-3x + 3y^2}$$

$$-3x + 3y^2 = 3x^2 - 3y \quad | : 3$$

$$-x + y^2 - x^2 + y = 0$$

$$\underline{y^2 - x^2} + y - x = 0$$

$$(y-x)(y+x) + (y-x) = 0$$

$$(y-x)(y+x+1) = 0$$

$y = x$ eller $y = -x - 1$

$g'_x = 3x^2 - 3y = 0$

$g'_y = -3x + 3y^2 = 0$

$x^3 - 3xy + y^3 = 0$

$y = x^2$

$-3x + 3(x^2)^2 = 0$

$-3(x - x^4) = 0$

$-3x(1 - x^3) = 0$

$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	$y = 1$
$0 = 0$	$-1 = 0$
ok	umulig

Kand. pkt: $(0,0)$ $f = 0$

a) $\underline{y = x}$: (3) $x^3 - 3x^2 + x^3 = 0$

$2x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(2x - 3) = 0$

$x = 0$ eller $x = 3/2$

$y = 0$ $\quad y = 3/2$

$\lambda = 1/0$ $\quad \lambda = \dfrac{1}{3(9/4 - 3/2)} = \dfrac{1}{3 \cdot 3/4} = 4/9$

$\underline{\text{umulig}}$

$(x, y; \lambda) = \underline{(3/2, 3/2;\ 4/9)}$ $\quad f = 3$

b) $\underline{y = -x - 1}$:

(3) $x^3 - 3x(-x-1) + (-x-1)^3 = 0$

$\cancel{x^3} + \cancel{3x^2} + \cancel{3x} + (-\cancel{x^3} - \cancel{3x^2} - \cancel{3x} - 1) = -1 = 0$

umulig

$\Rightarrow$ $\underline{\text{max}}$: $f_{max} = \underline{\underline{3}}$ i $\underline{\underline{(3/2, 3/2)}}$ med $\lambda = 4/9$