	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Lagranges multiplikatormetode	[E] 7.7	[E] 7.7.3 - 7.7.6
2	Nødvendige betingelser	[E] 7.7	

Rep. forelesning: Ons. 13. mai

Eksamen: Fredag 22. mai

Problem: max/min $f(x,y)$ når $g(x,y)=a$ (*)

(Lagrangeproblem)

Eks: i) max/min $f(x,y) = \overset{x(10-x)}{\overset{\shortparallel}{xy}}$ når $x+y=10 \Rightarrow y=10-x$

ii) max/min $f(x,y) = 2x+3y$ når $4x^2+9y^2=36$

Lagranges multiplikatormetode:

$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$ Lagrangefunksjon

Stasjonære pkt for L:

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= f'_x - \lambda\cdot g'_x = 0 \\ L'_y &= f'_y - \lambda\cdot g'_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ førsteordens betingelser (FOC)}$$

$$L'_\lambda = -1\cdot(g(x,y)-a) = 0 \quad \} \text{ bibetingelsen (C)} \quad g(x,y)=a$$

> **Teorem:**
> Hvis (x,y) er en løsning av Lagrangeproblemet (*), så må en av følgende betingelser holde:
> i) det fins en λ slik at $(x,y;\lambda)$ oppfyller FOC+C
> ii) bibetingelsen er degenerert i (x,y), dvs $g'_x = g'_y = 0$

<u>Eks I</u>: max/min $f(x,y) = xy$ når $x+y=10$

$L = L(x,y;\lambda) = xy - \lambda(x+y-10)$

$L'_x = y - \lambda \cdot 1 = 0$
$L'_y = x - \lambda \cdot 1 = 0$
$L'_\lambda = -1 \cdot (x+y-10) = 0$

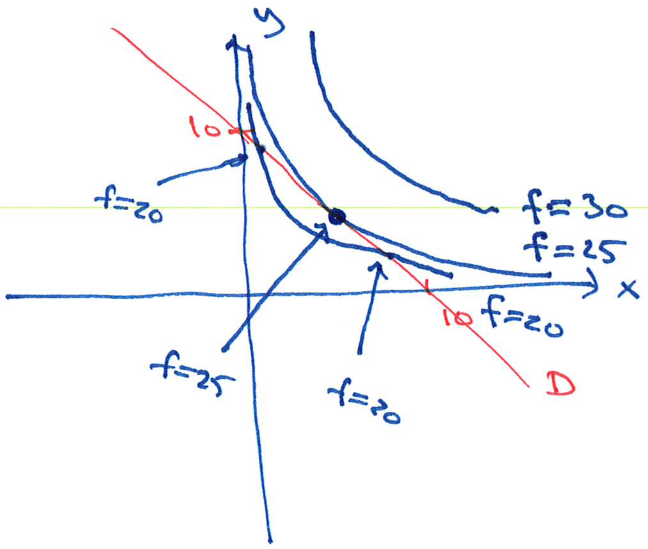
$$\boxed{\begin{aligned} y-\lambda &= 0 \\ x-\lambda &= 0 \\ x+y &= 10 \end{aligned}}$$

$y = \lambda = \underline{5}$
$x = \lambda = \underline{5}$
$\lambda + \lambda = 10$
$2\lambda = 10$
$\underline{\lambda = 5}$

<u>Kandidatpkt</u>: $(x,y;\lambda) = \underline{(5,5;5)}$
(det eneste pkt som kan være max/min)

<u>Unntak</u>: Degenerert bibetingelse

$g'_x = 0$ $\quad 1 = 0$
$g'_y = 0$ $\quad 1 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ ingen pkt med degenerert bibetingelse
$g(x,y) = x+y$



$D: x+y=10$ mengden av tillatte pkt

<u>Nivåkurve for f</u> gjennom $(5,5)$

$xy = 25$

$y = \dfrac{25}{x}$

<u>Konklusjon</u>:
$(x,y) = \underline{\underline{(5,5)}}$ er <u>max</u> i Lagrangeproblemet, med
$f_{max} = \underline{\underline{25}}$ og $\lambda = 5$

<u>Merk</u>: D er <u>ikke begrenset</u>

Eks 2: max/min $f(x,y) = 2x+3y$ når $4x^2+9y^2=36$

$$L = 2x+3y - \lambda(4x^2+9y^2-36)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 2-\lambda\cdot 8x = 0 \\ L'_y &= 3-\lambda\cdot 18y = 0 \\ & 4x^2+9y^2 = 36 \end{aligned}}$$

$8\lambda x = 2$

$x = \frac{2}{8\lambda} = \frac{1}{4\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$

$18\lambda y = 3$

$y = \frac{3}{18\lambda} = \frac{1}{6\lambda}$ "

$4\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{6\lambda}\right)^2 = 36$

$\frac{\cancel{4}}{4\cancel{16}\lambda^2} + \frac{\cancel{9}}{4\cancel{36}\lambda^2} = 36$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 36 \quad |\cdot 4\lambda^2$

$1+1 = 36\cdot 4\lambda^2$

$\lambda^2 = \frac{2}{36\cdot 4}$ $\quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{12}$

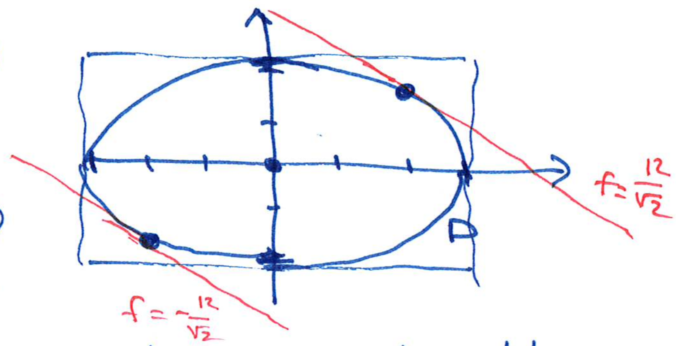
$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{12}$: $x = \frac{1 \cdot 12}{4\cdot\sqrt{2}/12 \cdot 12} = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad y = \frac{1\cdot 12}{6\cdot\sqrt{2}/12\cdot 12} = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

D: $4x^2+9y^2=36$ ellipse

$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36} = 1$ sentr. $(0,0)$

halvakser

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ $\quad a=3$, $b=2$



Merk: D er kompakt

$(-3\leq x\leq 3,\ -2\leq y\leq 2)$

EVS

$\Rightarrow$ vi har maks og min

Kandidatpunkt:

$(x,y;\lambda) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{12}\right)$, $f = \frac{12}{\sqrt{2}}$

$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{12}\right)$ $f = -\frac{12}{\sqrt{2}}$

Sjekk: degenerert bibetingelse

$\left.\begin{aligned} g'_x &= 8x = 0 \quad x=0 \\ g'_y &= 18y = 0 \quad y=0 \end{aligned}\right\}$ $(0,0)$ ikke tillatt

$\Rightarrow$ ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse

Konkl:

$f_{max} = \frac{12}{\sqrt{2}}$; $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{12}$

$f_{min} = -\frac{12}{\sqrt{2}}$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{12}$

Nødvendige betingelser i Lagrangemetoden:

max/min $f(x,y)$ når $g(x,y)=a$

Nødvendige betingelser:

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ L'_y &= f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \\ & \quad g(x,y) = a \end{aligned}}$$

$\left.\begin{aligned} f'_x &= \lambda \cdot g'_x \\ f'_y &= \lambda \cdot g'_y \end{aligned}\right\}$ $\boxed{\nabla f = \lambda \cdot \nabla g}$

← bibetingelsen er oppfylt!

gradientene til f og g ligger langs samme rette linje

$\Uparrow$

Kurvene $g(x,y)=a$ $f(x,y)=c$ møtes tangentielt