	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning	[E] 7.7	Oppgaveark 44-45: 7de
2	Nivåkurver og bibetingelser	[E] 7.7	
2	Bibetingelser gitt ved likninger	[E] 7.7	

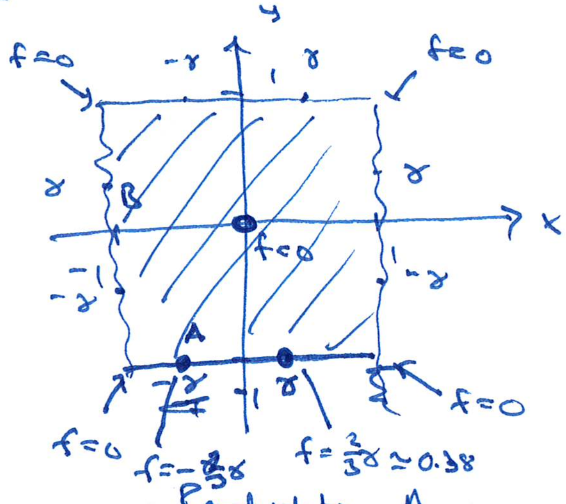
1 Repetisjon, Oppgave 7d fra Oppgaveark

7d) max/min $f(x,y) = xy(x^2-y^2)$

når $-1 \le x, y \le 1$

Bibetingelser: $x \ge -1 \quad y \ge -1$

$x \le 1 \quad y \le 1$



(a) D : $-1 \le x, y \le 1$ er kompakt (lukket og begrenset)

⇒ problemet har max/min EVT

⇒ max/min er enten randpkt eller et indre stasjonært pkt

Randpkt: A

$y = -1, \quad -1 \le x \le 1$

$f = f(x,-1) = -x^3 + x$

$f' = -3x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 1/3$ $\quad \pm 0.577$

$x = \pm\sqrt{1/3} = \pm 1/\sqrt{3} = \pm\gamma$

f': $-1 \quad -\gamma \quad \gamma \quad 1$

Stasjonære pkt: $f'_x = f'_y = 0$

$f = x^3y - xy^3$

$f'_x = 3x^2y - y^3 = 0$

$f'_y = x^3 - 3xy^2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} y(3x^2-y^2) = 0 \\ x(x^2-3y^2) = 0 \end{array}\right\}$ $(x,y) = (0,0)$ indre stasj. pkt $f = 0$

max på A:

$f(-1,-1) = 0$

$f(\gamma,-1) = -\gamma^3 + \gamma$

$= \gamma(-\gamma^2+1) = \frac{2}{3}\gamma \simeq 0.38$

min på A:

$f(1,-1) = 0$

$f(-\gamma,-1) = \gamma^3 - \gamma = \gamma(\gamma^2-1) = -\frac{2}{3}\gamma \simeq -0.38$

max på A: $f(\gamma,-1) = \frac{2}{3}\gamma \simeq 0.38$

min på A: $f(-\gamma,-1) = -\frac{2}{3}\gamma \simeq -0.38$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

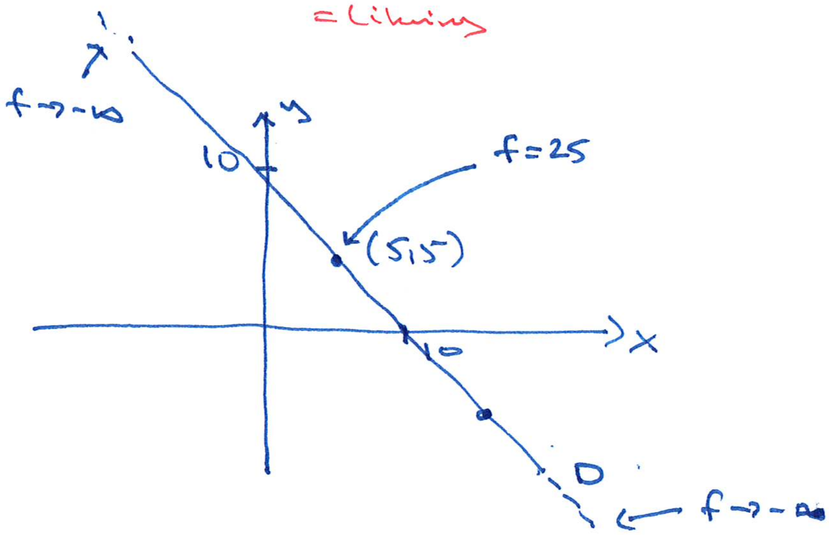
(2) Bibetingelser gitt ved likninger

Eks: max/min $\underbrace{f(x,y) = xy}_{\text{objektiv fn.}}$ når $\underbrace{x+y=10}_{\text{bibetingelse = likning}}$ D: $x+y=10$

D: rett linje
$y = 10 - x$

D er lukket
(randpkt = alle pkt på linjen)

D er ikke begrenset

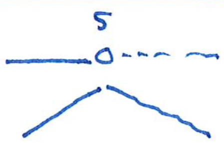


Metode 1: $y = 10 - x$

$f(x,y) = f(x, 10-x) = x\cdot(10-x)$, x vilkårlig tall

$= 10x - x^2$

$f' = 10 - 2x = 2(5-x)$



$x=5$: $f(5,5) = 5\cdot 5 = 25$ max

$x \to \infty$: $f(x,y) = 10x - x^2 \to -\infty$
$= x(10-x)$

$x \to -\infty$: $f(x,y) = x\cdot(10-x) \to -\infty$

Konklusjon: max pt $(5,5)$, max verdi $f(5,5) = 25 = f_{max}$

Ingen minimum

Metode 2: Nivåkurver for f

max/min $f(x,y) = xy$ når $x+y=10$: D

$f(x,y) = c$

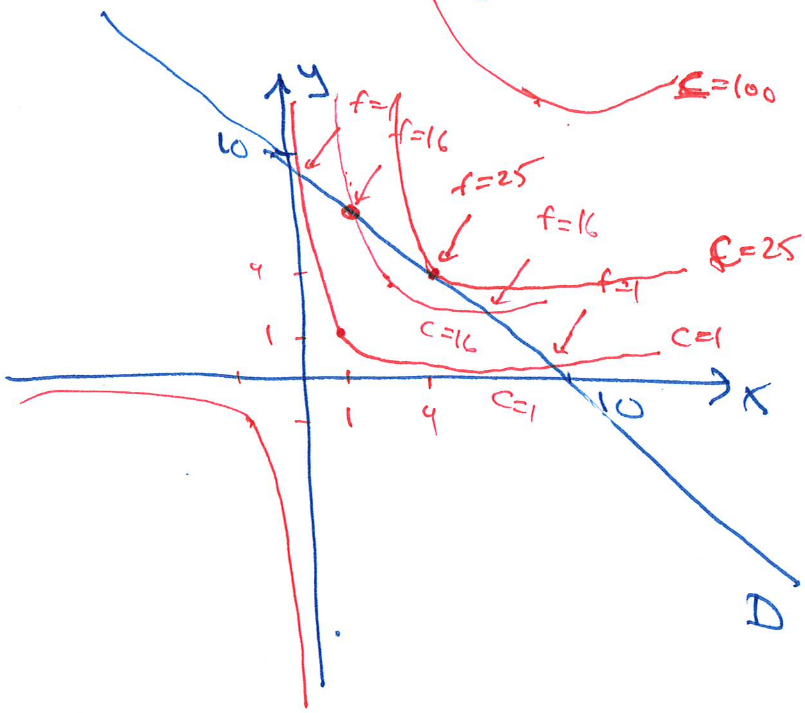
$xy = c$

$c=1$: $xy=1$
$y = 1/x$

$c=16$: $xy=16$
$y = 16/x$

$c=25$: $xy=25$
$y = 25/x$

$c=100$: $xy=100$
$y = 100/x$



Merk: $\boxed{\text{De punktene på D som er slik at nivåkurven til } f \text{ tangerer D er kandidater for max/min.}}$

max/min $f(x,y) = xy$ når $\underbrace{x+y}_{g(x,y)} = \underbrace{10}_{a}$

Metode 3: Lagranges multiplikator metode

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$$
$$= xy - \lambda(x+y-10) \leftarrow \text{Lagrange funksjonen}$$

Stasjonære pkt for L:

$$\text{FOC}\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda\cdot g'_x = y - \lambda\cdot 1 = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda\cdot g'_y = x - \lambda\cdot 1 = 0 \end{cases} \text{ førsteordens-betingelsene}$$

$$C\{\ L'_\lambda = 0 - 1(g(x,y)-a) = -(x+y-10) = 0 \iff x+y=10 \text{ bibetingelsen}$$

FOC + C

$$\boxed{\begin{aligned} y - \lambda &= 0 \\ x - \lambda &= 0 \\ x + y &= 10 \end{aligned}}$$

$y = \lambda$ $\quad$ $\underline{y = 5}$

$x = \lambda$ $\quad$ $\underline{x = 5}$

$\lambda + \lambda = 10$

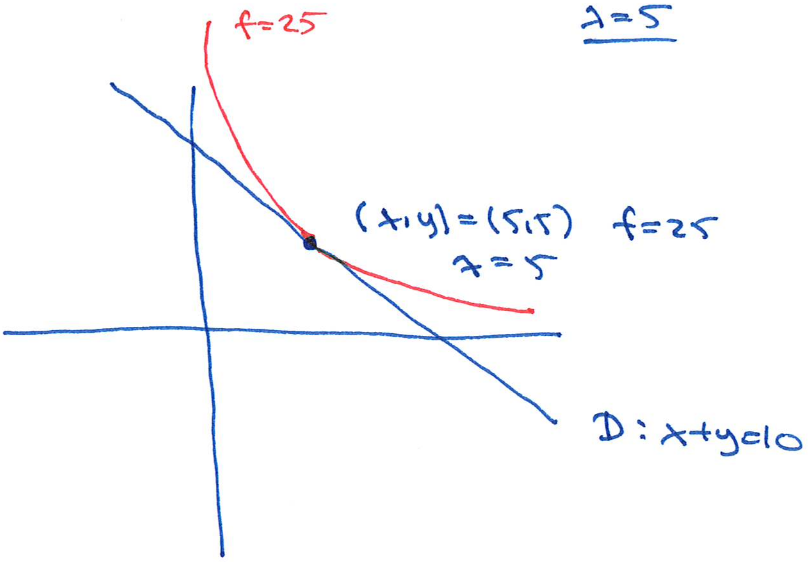
$2\lambda = 10$

$\underline{\lambda = 5}$

<u>Kandidatpkt</u>:

$(x,y;\lambda) = \underline{(5,5;5)}$

$\underline{f = 25}$



<u>Nivåkurve</u> $\underline{f(x,y) = 25}$

$xy = 25$

$y = 25/x$

<u>Teori for Lagrange-metoden</u>:

(1) De punktene $(x,y;\lambda)$ som er <u>kandidatpkt</u> = <u>stasjonære pkt for L</u> er akkurat de punktene som ligger på D hvor <u>nivåkurven tangerer D</u>.

(2) I et <u>Lagrange problem</u> (= max/min-problem med likninger som bibetingelser) så er de stasjonære punktene for L de eneste punktene som kan være max eller min. (med noen unntak)