	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Optimering med bibetingelser	[E] 7.7	
2	Indre punkt og randpunkt	[E] 7.7	[E] 7.7.2
3	Ekstremverdisetningen	[E] 7.7	[E] 7.7.1

1 Optimering med bibetingelser

Eks: max/min $f(x,y) = x^2+4x+y^2-2y$ ← objektivfn.

når
$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+y \le 10 \end{array}\right\} \text{bibetingelser}$$

D = mengden av tillatte punkter

= alle pkt (x,y) slik at
$x \ge 0$
$y \ge 0$
$x+y \le 10$

Smlikning: ~~max~~/min $f(x,y) = x^2+4x+y^2-2y$

$D_f = \mathbb{R}^2$ = alle pkt (x,y)

Kandidatpkt:
i) Stasjonære pkt $f'_x = f'_y = 0$ Ja
ii) pkt der f'_x / f'_y ikke eks. nei.
iii) randpkt for D_f nei

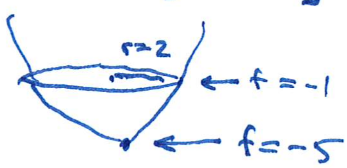
$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x+4 = 0 \\ f'_y = 2y-2 = 0 \end{array}\right\} (x,y) = (-2,1)$$

lokalt min. og globalt min

$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ det = 4, A = 2

$f(x,y) = x^2+4x+4 + y^2-2y+1 - 5$
$(x+2)^2 + (y-1)^2 - 5$

$f_{min} = -5$
min pkt $(-2,1)$



$f(x,y) = c$
$(x+2)^2 + (y-1)^2 = c+5$
$c > -5$: sirkel $s = (-2,1)$ radius $\sqrt{c+5}$
$c = -5$: pkt $(-2,1)$

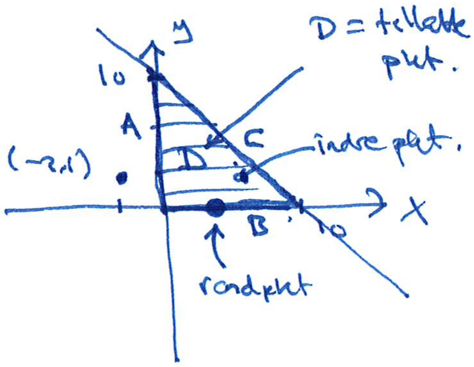
Eks: Max/min $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$ når $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$

Kandidatplkt:

i) Stasjonære plkt for f som er indre plkt for D

ii) plkt der f'_x / f'_y ikke eks. — " —

iii) randplkt for D



Defn: Indre plkt for D er et plkt i D som ikke er et randplkt, dvs
$(x > 0, \; y > 0, \; x + y < 10)$

Randplkt for D er et plkt som ligger uendelig nært plkt i D og plkt utenfor D
$(x = 0 \text{ eller } y = 0 \text{ eller } x + y = 10)$

$x + y = 10 \quad y = 10 - x$

$x + y < 10 \quad y < 10 - x$

Kandidatplkt i eks:

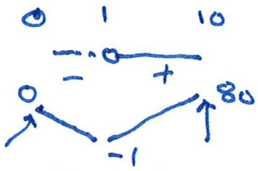
i) Stasj. plkt for f: $\cancel{(-2,1)}$ – ikke indreplkt i D $\qquad f = x^2 + 4x + y^2 - 2y$

ii) plkt der f'_x / f'_y ikke eks: ingen

iii) Randplkt for D:
A: $x = 0, \; 0 \leq y \leq 10 \qquad f = y^2 - 2y, \; 0 \leq y \leq 10$
B: $y = 0, \; 0 \leq x \leq 10 \qquad f = x^2 + 4x, \; 0 \leq x \leq 10$
C: $0 \leq x \leq 10, \; y = 10 - x \qquad f = x^2 + 4x + (10-x)^2 - 2(10-x)$
$= 2x^2 - 14x + 80$

Max/min på A: $x = 0$

$f = y^2 - 2y \qquad f' = 2y - 2 = 2(y-1)$



$f(0,0) = 0 \qquad f(0,10) = 80$

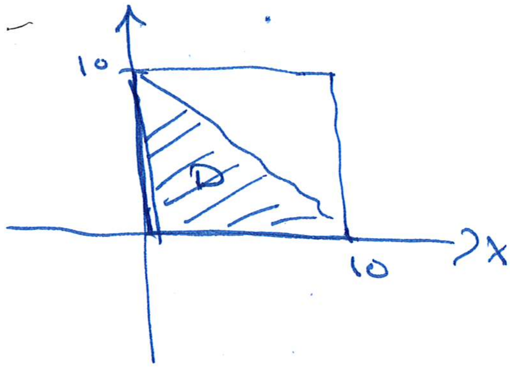
min på A: $f(0,1) = -1$

max på A: $f(0,10) = 80$

Ekstremverdisetningen:

Hvis f er en kontinuerlig funksjon på en kompakt mengde D, så har f både et maks og et min på D.

Defn: En mengde D er kompakt hvis den er lukket og begrenset.



$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 10$

✓ lukket
✓ begrenset $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$

$\Downarrow$

I eks er D kompakt

D er lukket hvis alle randpunktene til D er inkludert i D

(lukket hvis betingelsene er gitt ved $=, \leq, \geq$)

D er begrenset hvis det fins et rektangel som inneholder alle punkt i D

(begrenset hvis det fins a, b, c, d slik at

$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d$$

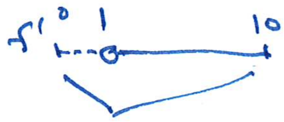
for alle (x,y) i D)

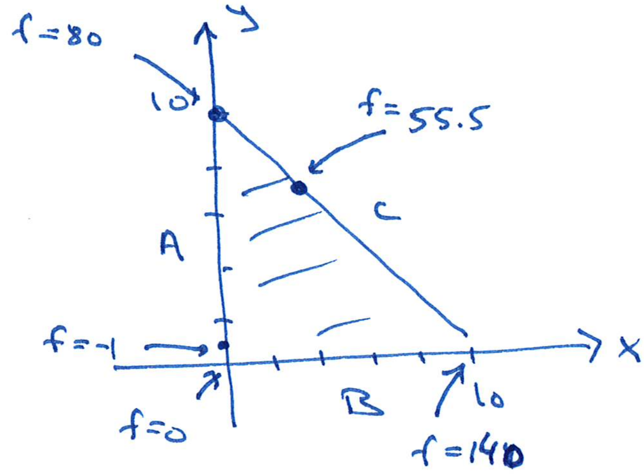
Eks: max/min $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$ når $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 10 \end{cases}$

har et max og et min ved EVS.

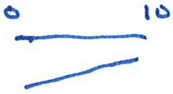
$\Rightarrow$ D må være max og min blant sidekanten A, B, C.

$\underline{A}$: min $f(0,1) = -1$
max $f(0,10) = \underline{80}$



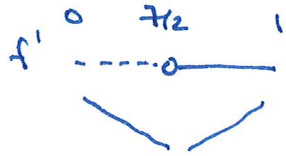


$\underline{B}$: $f = x^2+4x$, $0 \le x \le 10$
$f' = 2x+4$



min: $f(0,0) = \underline{0}$
max: $f(10,0) = \underline{140}$

$\underline{C}$: $f = x^2+4x+(10-x)^2-2(10-x)$ $y=10-x$, $0 \le x \le 10$
$= 2x^2-14x+80$
$f' = 4x-14 = 0$
$4x = 14$
$x = 14/4 = 7/2$

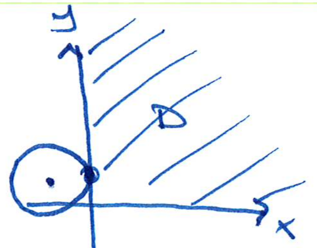


min: $f(7/2, 13/2)$
$= 2(49/4) - 14(7/2) + 80$
$= \frac{49}{2} - 49 + 80$
$= \frac{110}{2} = \underline{55.5}$

$\underline{\text{max}}$: $f(10,0) = \underline{144}$

$\underline{\text{Konkl:}}$ $f_{max} = \underline{\underline{140}}$ i $(x,y) = (10,0)$
$f_{min} = \underline{\underline{-1}}$ i $(x,y) = (0,-1)$

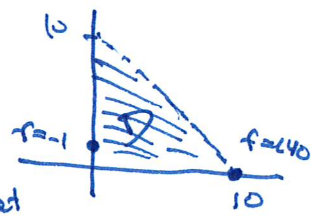
$\underline{\text{Eks:}}$ i) max/min $f(x,y) = x^2+4x+y^2-2y$ når $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$
EVS <u>kan ikke brukes</u>, dvs <u>ikke</u> sikkert at f har max og min på D.
(i eks har den <u>min</u> men <u>ikke maks</u>)



lukket, <u>ikke begrenset</u>

ii) max/min $f(x,y) = x^2+4x+y^2-2y$ når $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+y < 10 \end{cases}$
(i eks har vi min men <u>ikke</u> maks)

begrenset, men ikke lukket



<u>Eks:</u> max/min $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$ når $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$

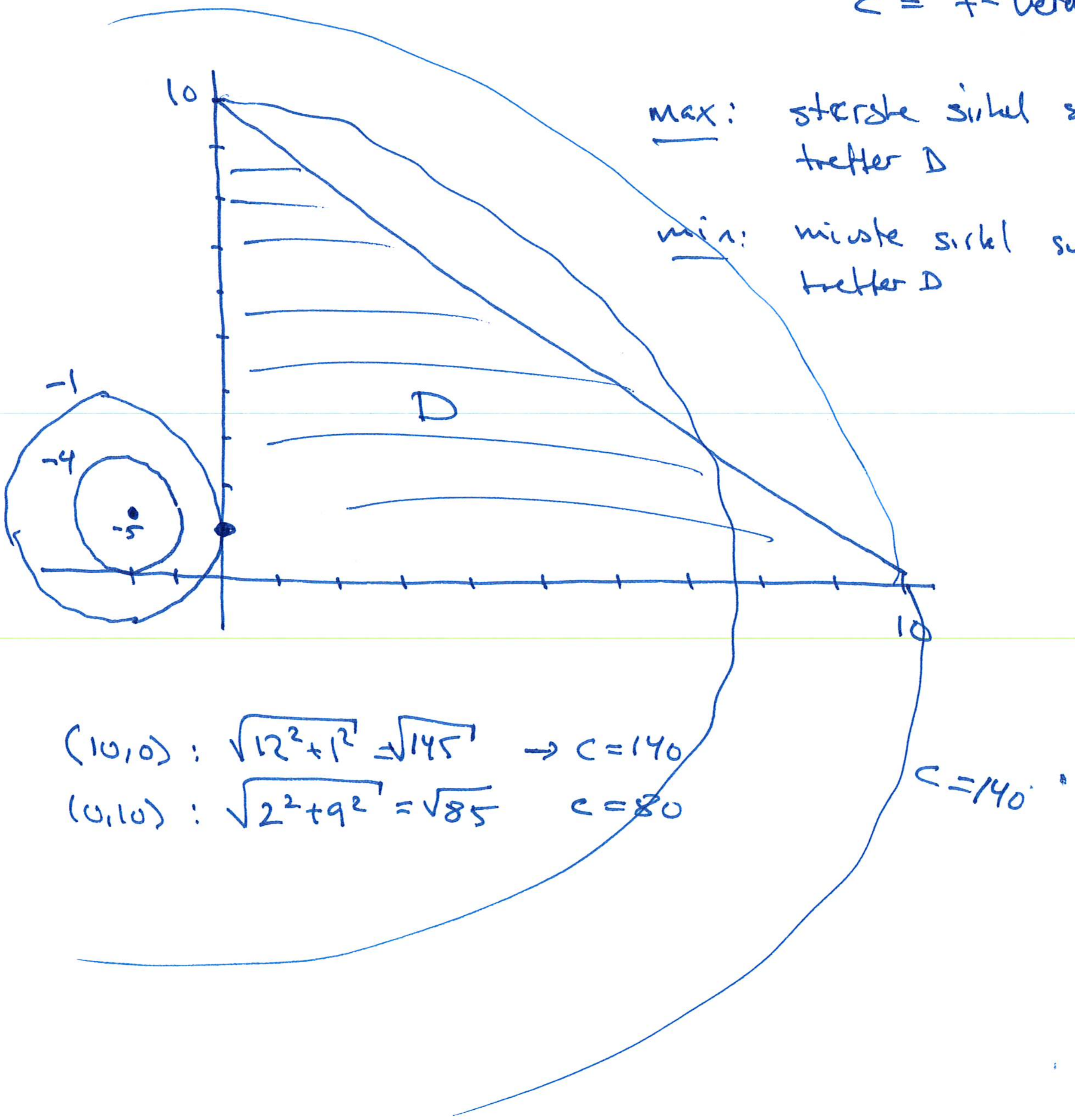
<u>Nivåkurver for f:</u> $f(x,y) = c$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = c + 5$ sirkel, med $S = (-2,1)$ og radius $\sqrt{c+5}$

c = f-verdi

<u>max:</u> største sirkel som treffer D

<u>min:</u> minste sirkel som treffer D



$(10,0): \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{145} \rightarrow c = 140$

$(0,10): \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85} \quad c = 80$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/