	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning		[Ark] 2a, 5, 8
2	Lineær approksimasjon og gradienten	[E] 7.6	[E] 7.6.1 - 7.6.3
3	Globale maksimums- og minimumspunkter	[E] 7.4	[E] 7.4.3 - 7.4.4

① Repetisjon

Andre derivert-testen: (x^*, y^*) stasjonært pkt for f

$H = H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$:

$\det H > 0,\ A > 0$: lok min

$\det H > 0,\ A < 0$: lok maks

$\det H < 0$: sadelpkt

($\det H = 0$: ingen konkl.)

Oppgaveark:

2a) $f = xy(x^2 - y^2) = x^3y - xy^3$

$f'_x = 3x^2y - y^3 = 0$

$f'_y = x^3 - 3xy^2 = 0$

$H(f) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 - 3y^2 \\ 3x^2 - 3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$

$y(3x^2 - y^2) = 0$

$x(x^2 - 3y^2) = 0$

a) $y = 0,\ x = 0$

b) $y = 0,\ x^2 - 3y^2 = 0$

c) $x = 0,\ 3x^2 - y^2 = 0$

d) $3x^2 - \cancel{3}y^2 = 0,\ x^2 - 3y^2 = 0$

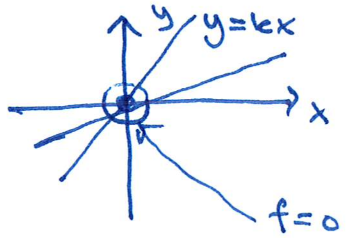
$3(3y^2) - \cancel{3}y^2 = 0 \quad x^2 = 3y^2$

$\Downarrow$

$(x, y) = (0, 0)$

$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

~~andrederivert-testen~~



$f \geq 0$ for alle (x,y) nært $(0,0)$: lok min

$f \leq 0$ — " — lok maks

ellers: sadelpkt

$f(x, kx) = kx^2(x^2 - k^2x^2) = k(1-k^2)x^4$

$k = 1/2$: $f = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^4 \geq 0$

$k = 2$: $f = 2 \cdot (-3)x^4 \leq 0$

$\Rightarrow$ sadelpkt

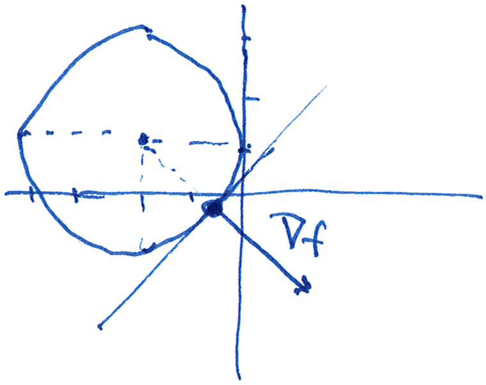
5. $f(x,y) = \underline{x^2+4x+4} + \underline{y^2-2y+1} = c+4+1$

$$(x+2)^2+(y-1)^2 = c+5$$

sirkel m/ sentrum $(-2,1)$ med $r=\sqrt{c+5}$ hvis $c>-5$

pkt $(-2,1)$ hvis $c=-5$

ingen pkt hvis $c<-5$

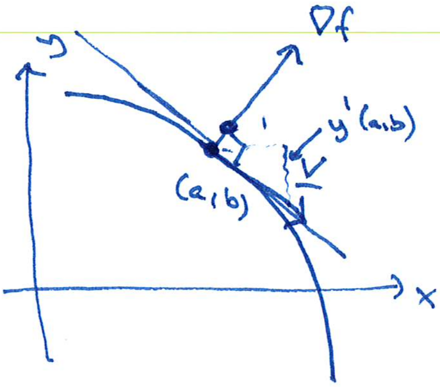


$c=-1$: radius $= 2$

∇f peker radielt ut fra sentrum $(-2,1)$ av sirkelen

8. i) $\nabla f(a,b)$ står normalt på tangenten til $f(x,y)=c$ i punktet (a,b)

ii) f vokser om vi går et kort stykke langs gradienten



f(x,y)=c

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \qquad \nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} f'_x(a,b) \\ f'_y(a,b) \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)} \end{pmatrix}$$ vektor langs tangenten

$$\nabla f \perp \underline{v} \Leftrightarrow \nabla f \cdot \underline{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} f'_x(a,b) \\ f'_y(a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -f'_x(a,b)/f'_y(a,b) \end{pmatrix} = f'_x(a,b)$$

$$+ \cancel{f'_y(a,b)} \cdot \left(-\frac{f'_x(a,b)}{\cancel{f'_y(a,b)}}\right) = 0 \quad \checkmark \ \underline{\text{ok}}.$$

$f(a,b) \rightsquigarrow f(a+h_1, b+h_2)$

$\cong f(a,b) + h_1 \cdot f'_x(a,b) + h_2 \cdot f'_y(a,b)$

$= f(a,b) + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla f(a,b)$

$= f(a,b) + \varepsilon \nabla f(a,b) \cdot \nabla f(a,b)$

$= f(a,b) + \varepsilon \underbrace{\|\nabla f(a,b)\|^2}_{f'_x(a,b)^2 + f'_y(a,b)^2} \geq f(a,b)$

$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ vektor langs $\nabla f(a,b)$

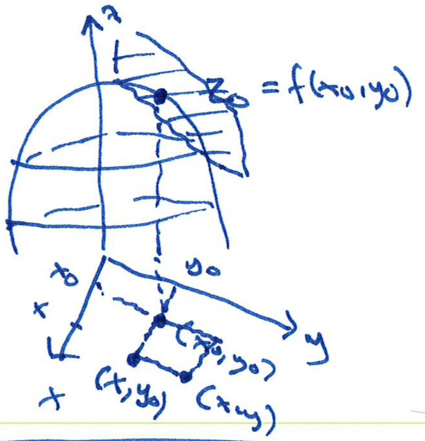
$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \nabla f(a,b)$

(ε lite tall) pos.

(2) Lineær approksimasjon

$z = f(x,y)$

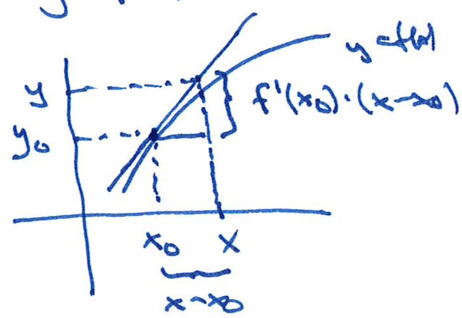
Lin. approksimasjon i pkt (x_0, y_0, z_0)



$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$$

I én variabel:

$y = f(x)$



$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$y = y_0 + y'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$\boxed{\underset{f(x)}{y} = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$ lin. approksimasjon : $(x_0,y_0) = (1,1)$

$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}}\cdot 1$

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}}\cdot 3$

$f(1,1) = \sqrt{4} = 2$

$f'_x(1,1) = 1/4 = 0.25$

$f'_y(1,1) = 3/4 = 0.75$

$f(x,y) \cong 2 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{4}(y-1)$

$f(1.1, 0.9) \simeq 2 + 0.25 \cdot 0.1 + 0.75 \cdot (-0.1)$

$= 2 + 0.025 - 0.075 = 1.95$

Tangentplanet til $f(x,y)$ i pkt. (x_0, y_0, z_0)
med $z_0 = f(x_0,y_0)$

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)} \Leftrightarrow z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

(lineær funksjon)

③ Globale maks/min: Optimering uten bibetingelser

Problem: $\boxed{\text{max/min } f(x,y)}$

Metode: I. Finne kandidatpkt

i) Stasjonære pkt for f $\boxed{f'_x = f'_y = 0}$

ii) pkt der f'_x eller f'_y ikke eksisterer

iii) randpkt for D_f

II Klassifisere kandidatpkt-ene som lokalen maks, lokale min, sadelpkt

i) Andrederivert-testen (for stasjonære pkt med $\det H(f) \neq 0$)

ii) Fra defn. eller på andre måter

III Konkludere om globale maks/min

i) Global maks ⇒ lokalt maks.
Globale min ⇒ lokale min

ii) Avgjøre på en eller annen måte

Eks: i) $f(x,y) = 2x + 3y$ ingen kandidatpkt

$\Rightarrow$ ingen maks/min

ii) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 = \underline{x^2 - 2x + 1} - 1 + \underline{4y^2} = (x-1)^2 + 4y^2 - 1$

$f'_x = 2x - 2 = 0 \quad x = 1$

$f'_y = 8y = 0 \quad y = 0$

$\Bigg\}$ $\underline{(1,0)}$ med $\underline{f(1,0) = -1}$ lokalt min.

$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\det = 16 > 0$, $A = 2 > 0$

$f(x,y) = (x-1)^2 + 4y^2 - 1 \geq -1$

for alle x,y

$\Rightarrow f_{min} = \underline{\underline{-1}}$: $\underline{\underline{(1,0)}}$

min verdi min. pkt

iii) $f = x^3 - 3xy + y^3$

$(0,0)$ sadel pkt

$\underline{(1,1)}$ lokalt min

$f(1,1) = \underline{-1}$

$f(-2,0) = -8 < -1 \Rightarrow$ ingen globale min