	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Tangenten til en nivåkurve	[E] 7.5	[E] 7.5.1 - 7.5.3
2	Gradienten	[E] 7.6	[E] 7.6.1 - 7.6.3

Rep: max/min $f(x,y)$

Kandidatpkt: (1) Stasjonære pkt $f'_x = 0,\ f'_y = 0$

(2) pkt der f'_x eller f'_y ikke fins

(3) randpkt for D_f

Andrederivert-testen: $H(f)(x^*,y^*)$ — (x^*,y^*) lokalt max / " lokalt min / " sadelpkt

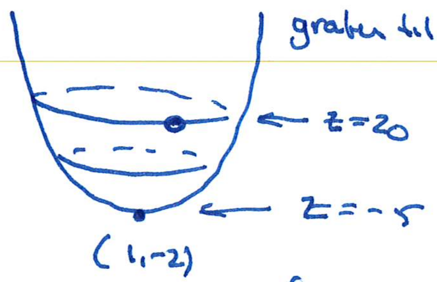
"Problem": pkt av type (2), (3)

pkt av type (1) med $\det H(f)(x^*,y^*) = 0$

avgjør om lokale max/min er globale max/min

(1) Tangenten til en nivåkurve

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$



Nivåkurve: $f(x,y) = c$

$\underbrace{x^2 - 2x + 1} + \underbrace{y^2 + 4y + 4} = c + 1 + 4$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = c + 5$

$c > -5$: sirkel, senter $(1,-2)$ og radius $= \sqrt{c+5} > 0$

$c = -5$: pkt $(1,-2)$

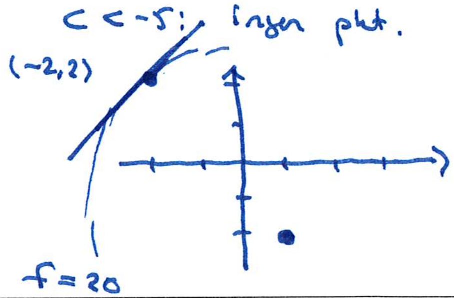
$c < -5$: ingen pkt.

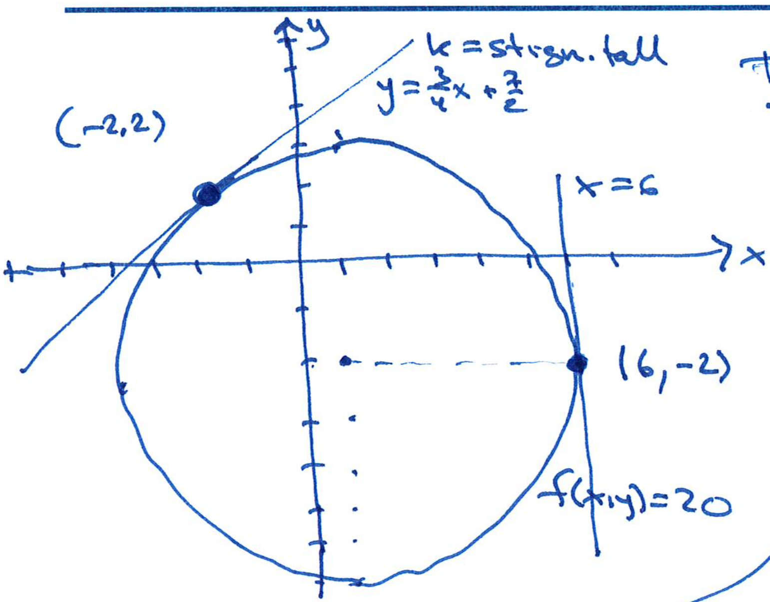
Nivåkurven til f gjennom pkt $(-2,2)$:

$f(-2,2) = 4 + 4 + 4 + 8 = 20$

$(-2,2)$ ligger på nivåkurven $f(x,y) = 20$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$





Tangent: $\boxed{y-2 = k\cdot(x+2)}$

Finner $k = y'(-2,2)$

$$x^2-2x+y^2+4y=20$$

$$2x-2+2y\cdot y'+4y'=0$$

$$f'_x\cdot 1 + f'_y\cdot y' = 0$$

$$(2x-2)+(2y+4)\cdot y'=0$$

$$\frac{(2y+4)y'}{2y+4} = -\frac{(2x-2)}{2y+4}$$

$$y' = -\frac{2x-2}{2y+4}$$

$$y'(x,y) = -\frac{x-1}{y+2}$$

$$y'(-2,2) = -\frac{-3}{4} = 3/4$$

$$y-2=\frac{3}{4}(x+2)$$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{6}{4}+\frac{8}{4}$$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$$

tangenten til nivåkurven $f(x,y)=20$ i $(-2,2)$

Resultat:

Når vi bruker implisitt derivasjon mhp x på en nivåkurve $f(x,y)=c$, så får vi: $f'_x\cdot 1+f'_y\cdot y'=0$

Dvs: $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$ $\longleftarrow$ $\dfrac{f'_y\cdot y'}{f'_y} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$

Eks: Nivåkurven til $f(x,y)=x^2-2x+y^2+4y$ i pkt. $(6,-2)$

$y' = -\frac{x-1}{y+2} = -\frac{5}{0} \longleftarrow$ $f'_x\neq 0$, $f'_y=0$

Formelen $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$ gjelder når $f'_y \neq 0$

Unntak:

$\left.\begin{matrix} f'_y = 0 \\ f'_x \neq 0 \end{matrix}\right\}$ tangenten er en vertikal rett linje $x = x_0$ ("stign.tallet er $\pm\infty$")

$\left.\begin{matrix} f'_y = 0 \\ f'_x = 0 \end{matrix}\right\}$ "singularitet"

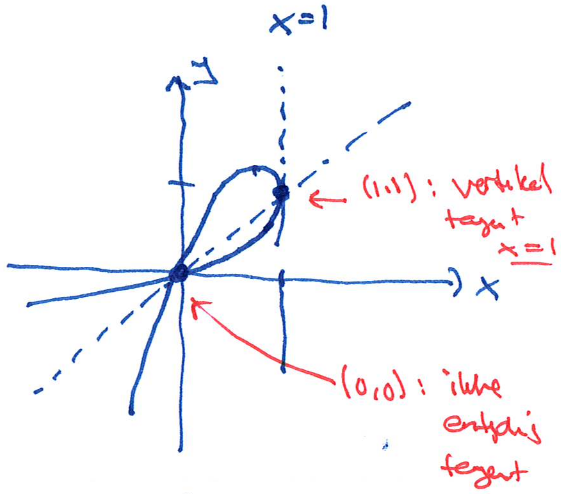
Eks: $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2 = 0$

$f'_x = 3x^2 - 2y$

$f'_y = -2x + 2y$

$y'(1,1) = -\frac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -\frac{1}{0}$

$y'(0,0) = -\frac{0}{0}$



$x = y$: $f(x,x) = x^3 - 2x^2 + x^2 = 0$

$x^2(x-1) = 0$

$\underline{x=0}$, $\underline{x=1}$

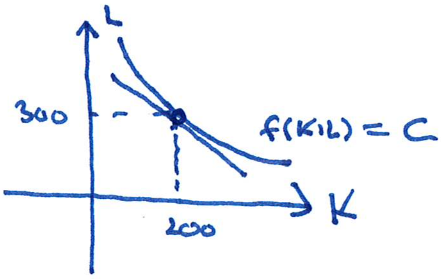
Eks: Produksjonsfunksjon

$f(K,L) = 200K^{1.2}L^{0.8} = C$

Marginal substitusjonsbrøk

$\left.\begin{matrix} f'_K = 200 \cdot 1.2 K^{0.2} \cdot L^{0.8} \\ f'_L = 200 \cdot K^{1.2} \cdot 0.8 \cdot L^{-0.2} \end{matrix}\right\} -\frac{f'_K}{f'_L} = -\frac{\cancel{200} \cdot 1.2 K^{0.2} L^{0.8}}{\cancel{200} \cdot K^{1.2} \cdot 0.8 \cdot L^{-0.2}}$

$= -1.5 \frac{L}{K}$



$\left.\begin{matrix} K = 200 \\ L = 300 \end{matrix}\right\} -\frac{f'_K}{f'_L} = -1.5 \cdot \frac{300}{200}$

$= -2.25$

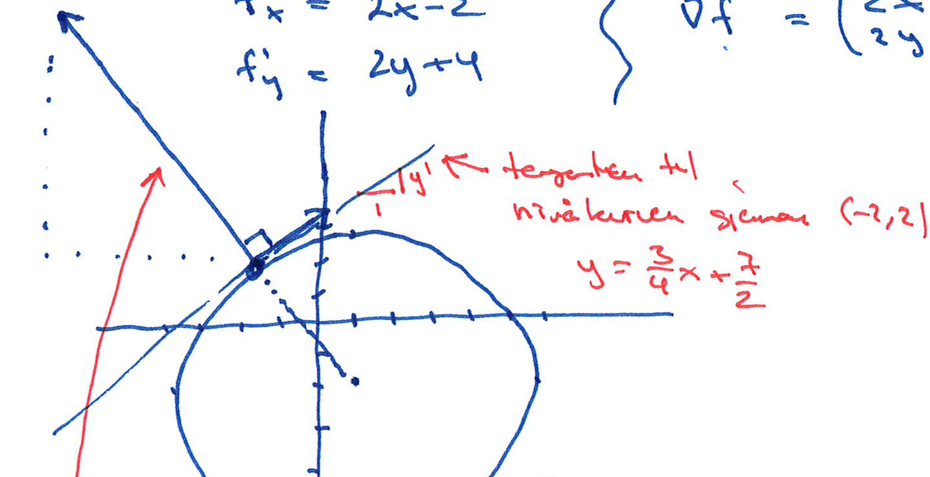
② Gradienten til f

Gradienten til f i pkt. (x_0, y_0): $\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

(en vektor)

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x-2 \\ f'_y &= 2y+4 \end{aligned}\right\} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+4 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(-2,2) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}}}$$



gradienten til f i $(-2,2)$

$\nabla f(-2,2) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = c$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = c+5$

sirkel m/radius $\sqrt{c+5}$

Tolkning: Gradienten til f i et pkt peker i den retningen hvor f vokser raskest

Resultat: Gradienten står normalt på tangenten til nivåkurven.

Vektor langs tangenten: $\begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -f'_x/f'_y \end{pmatrix}$

Sjekk: $\nabla f \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -f'_x/f'_y \end{pmatrix} = f'_x \cdot 1 + \cancel{f'_y} \cdot \left(-f'_x/\cancel{f'_y}\right)$

$= f'_x - f'_x = 0$

1 eks: tangenten: $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3/4 \cdot x + 7/2 \end{pmatrix}$

Vektor langs tangenten: $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}} \longleftarrow \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

Gradienten $\nabla f(-2,2) = \underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-6) + 3/4 \cdot 8 = -6 + 6 = 0$$

Oppgaveark, 9a

$$f(x) = \int_0^x 2z e^{-z^2} \, dz \qquad f'(x) = (F(x) - F(0))' = F'(x) - 0$$

$$= \underline{\underline{2x e^{-x^2}}}$$

$$\| \quad [F(z)]_0^x = F(x) - F(0)$$

der $F'(z) = 2z e^{-z^2}$

c) $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} 2z e^{-z^2} \, dz = \int_0^u 2z e^{-z^2} \, dz$ med $u = \sqrt{x}$

$$f'(x) = F(u) \cdot u' = 2u e^{-u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cancel{2\sqrt{x}} e^{-x} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}} = \underline{\underline{e^{-x}}}$$