	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning		
2	Klassifikasjon av stasjonære punkter	[E] 7.4	[E] 7.4.1 - 7.4.4

① Repetisjon $f(x,y)$

Partiellderiverte

$f'_x(x,y)$
$f'_y(x,y)$

Hessematrisen

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Stasjonære pkt:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{førsteordens-betingelser (FOC)}$$

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y = 0$

$f'_y = -3x + 3y^2 = 0$

Stasj. pkt:

$(x,y) = (0,0), (1,1)$ kandidatpkt

Fakta: $H(f)$ er symmetrisk $\Leftrightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$ for alle "vanlige" fn.

Resultat:

Hvis et pkt er max/min for f, så er det enten

i) stasjonært pkt
ii) pkt der f'_x eller f'_y ikke eksisterer
iii) randpkt for D_f

Defn: Et pkt (x^*,y^*) er max / min eller globalt max / globalt min for f hvis

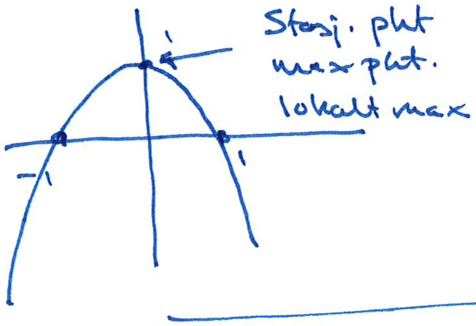
$f(x^*,y^*) \geq f(x,y)$
$f(x^*,y^*) \leq f(x,y)$

for alle (x,y) i D_f.

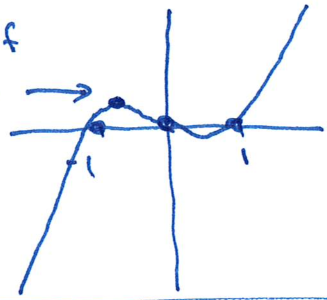
② Klassifikasjon av stasjonære pkt som lokale max, lokale min, eller sadelpkt

Defn: Et pkt (x^*, y^*) er et lokalt maksimumspkt (lokalt minimumspkt) hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ ($f(x^*,y^*) \leq f(x,y)$) for alle pkt (x,y) nært (x^*, y^*).

Eks: $f(x) = 1 - x^2$



Eks: $f(x) = x^3 - x = x(x^2-1)$

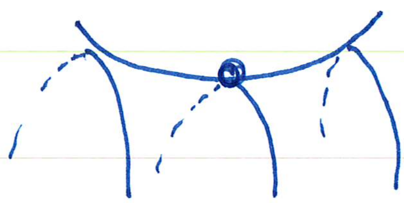


Husk: Andrederivert-testen for $f(x)$: Hvis x^* er et stasjonært pkt for f, så har vi:

$f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ lokalt min

$f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ lokalt max

Defn: Et stasjonært pkt for f som hverken er lokalt max eller lokalt min kalles et sadelpkt



Andrederivert-testen:

Hvis (x^*, y^*) er et stasjonært pkt for f, så ser vi på

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{xy}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Da har vi:

i) $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$ og $A > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ lokalt min

ii) $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$ og $A < 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ lokalt max

iii) $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 < 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ sadelpkt

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y$ $\qquad f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = -3$

$f'_y = -3x + 3y^2$ $\qquad f''_{xy} = -3 \qquad f''_{yy} = 6y$

Stag. pkt: $(0,0), (1,1)$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Andrederivert-testen:

$(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \det = 0 - (-3)^2 = -9$

$\Rightarrow (0,0)$ er sadelpkt

$(1,1)$: $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \det = 6^2 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$

$A = 6 > 0$

$\Rightarrow (1,1)$ er lokalt min

Konkl. f har ikke maxpkt.

Kandidat for min: $f(1,1) = -1$

lokalt min

ikke min

$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$y=0$: $f(x,0) = x^3$

$f(-2,0) = -8 < -1$

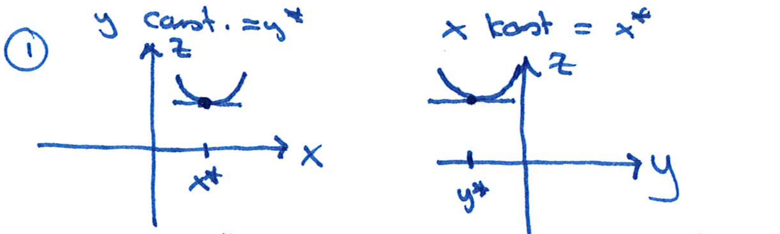
Tilfeller:

$\det = AC - B^2 > 0$: $AC > B^2 \geq 0$, $AC > 0$

- $A > 0, C > 0$ (1) lokalt min
- $A < 0, C < 0$ (2) lokalt max

$\det = AC - B^2 = 0$: ingen konklusjon fra andre derivert testen.

$\det = AC - B^2 < 0$ sadelpkt (3)



$A = f''_{xx}(x^*, y^*) > 0$ $\qquad C = f''_{yy}(x^*, y^*) > 0$

Oppgaverde:

5h, 6h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{u}$, $u = x^2+y^2$

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{xx} = \left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)'_x = \left(x \cdot u^{-1/2}\right)'_x = 1 \cdot u^{-1/2} + x \cdot (-1/2) u^{-3/2} \cdot \underbrace{u'_x}_{2x}$$

$$= \frac{1 \cdot u}{\sqrt{u} \cdot u} - \frac{x^2}{u \cdot \sqrt{u}} = \frac{\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2}}{u\sqrt{u}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{u\sqrt{u}}$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)'_y = \left(x \cdot u^{-1/2}\right)'_y = x \cdot (-1/2) u^{-3/2} \cdot 2y$$

$$= -\frac{xy}{u\sqrt{u}}$$

$$f''_{yy} = \frac{x^2}{u\sqrt{u}}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{u\sqrt{u}} & \frac{-xy}{u\sqrt{u}} \\ \frac{-xy}{u\sqrt{u}} & \frac{x^2}{u\sqrt{u}} \end{pmatrix} = \frac{1}{u\sqrt{u}} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$u(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$

8b) $f = x^2y + xy^3 + xy^2$

$f'_x = 2xy + y^3 + y^2 = 0 \qquad y(2x + y^2 + y) = 0$

$f'_y = x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0 \qquad x(x + 3y^2 + 2y) = 0$

Tilfeller:

$y = 0$ eller $2x + y^2 + y = 0$

og

$x = 0$ eller $x + 3y^2 + 2y = 0$

a) $y=0, x=0$: $(0,0)$

b) $y=0$, $x + 3y^2 + 2y = 0$: $(0,0)$

c) $x=0$, $2x + y^2 + y = 0$: $y^2 + y = 0$, $y(y+1) = 0$ $\begin{cases} y=0 & (0,0) \\ y=-1 & (0,-1) \end{cases}$

d) $2x + y^2 + y = 0$, $x + 3y^2 + 2y = 0$:

$x = -3y^2 - 2y$

$2(-3y^2 - 2y) + y^2 + y = 0$

$-5y^2 - 3y = 0$

$-y(5y+3) = 0$

$y = 0$ eller $y = -3/5$

$x = 0 \qquad x = -3(9/25) - 2(-3/5) \cdot \frac{5}{5}$

$(0,0) \qquad = \frac{-27}{25} + \frac{30}{25} = 3/25$

$(3/25, -3/5)$

Stasjonære pkt: $(x,y) = (0,0), (0,-1), (3/25, -3/5)$