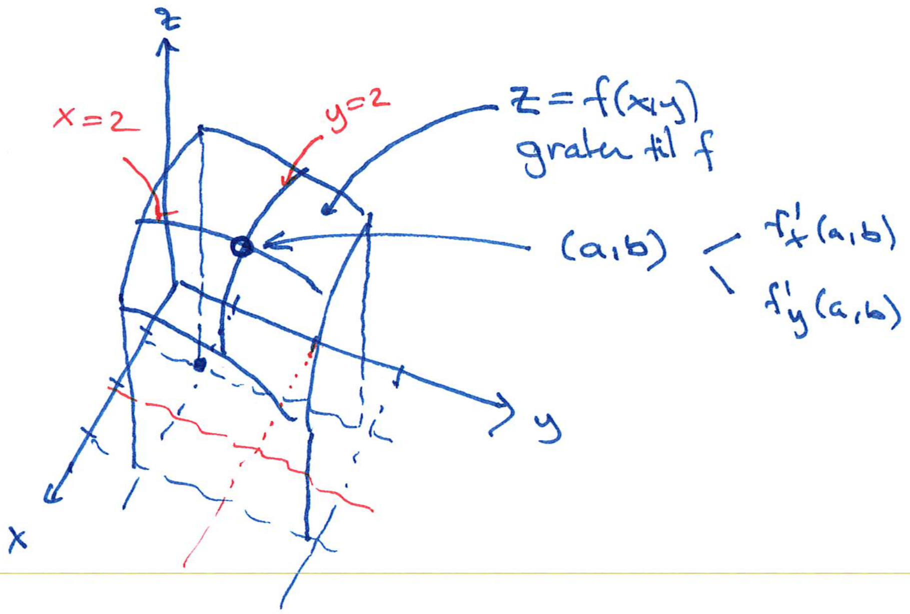
	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Lineære funksjoner	[E] 7.2	[E] 7.2.1 - 7.2.3
2	Partiell-derivasjon	[E] 7.3	[E] 7.3.1 - 7.3.2
3	Andrederiverte og Hesse-matrisen	[E] 7.3	[E] 7.3.3 - 7.3.5
4	Stasjonære punkter	[E] 7.4	

$f(x,y)$: funksjon i to variabler

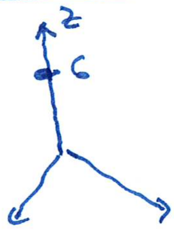
$z = f(x,y)$: grafen til f i xyz-koordinatsystemet



① Lineære funksjoner $f(x,y) = ax + by + c$

Grafen til en funksjon f er et plan $\iff$ f er en lineær funksjon

(uten krumning)



Eks: $2x - 3y + 6 = f(x,y)$

– Skjæring med z-aksen: $f(0,0) = 6$

– normalvektor: $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$

$z = 2x - 3y$

$0 = 2x - 3y - z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ står normalt på normal-vektoren

Konklusjon: $z = f(x,y) = ax + by + c$ har graf som er et plan som skjærer z-aksen i $z = c$ og som har normalvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 Partiell derivasjon

$f(x,y)$ fn. i to variabler

~~$f'(x,y)$~~

$$\underbrace{\begin{aligned} f'_x = f'_x(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ f'_y = f'_y(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{aligned}}_{\text{de partiell deriverte til } f(x,y)}$$

(første ordens)

Tolkning: $f'_x(a,b)$ er stigningstallet til tangenten til kurven vi får når $y = b$ i pkt. $x = a$

$f'_y(a,b)$ er stigningstallet til tangenten til kurven vi får når $x = a$ i $y = b$

Utregning av de partiell deriverte: $\begin{cases} f'_x : y \text{ konst, vanlige der. regler} \\ f'_y : x \text{ konst, — " —} \end{cases}$

Eks: $f(x,y) = 2x - 3y + 6$

$f'_x(x,y) = 2 - 0 + 0 = \underline{\underline{2}}$

$f'_y(x,y) = 0 - 3 + 0 = \underline{\underline{-3}}$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 6y - 12$

$f'_x = f'_x(x,y) = \underline{2x-2}$ $\quad f'_x(1,1) = \underline{0}$ $\quad f'_x(1,-3) = 0$

$f'_y = f'_y(x,y) = \underline{2y+6}$ $\quad f'_y(1,1) = \underline{8}$ $\quad f'_y(1,-3) = 0$

Defn: (x,y) kalles et <u>stasjonært</u> <u>pkt</u> for f hvis $\boxed{\begin{matrix} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{matrix}}$

førsteordens-betingelsene

$$\left.\begin{matrix} f'_x = 2x - 2 = 0 & x = 1 \\ f'_y = 2y + 6 = 0 & y = -3 \end{matrix}\right\} \text{Stasj. pkt for } f \text{ er } \underline{\underline{(1,-3)}}$$

Eks: $f(x,y) = y^3 \underline{- 3xy} + x^3$

$(-3xy)'_x = -3y \cdot (x)'_x = -3y \cdot 1$

$$\left.\begin{matrix} f'_x(x,y) = -3y \cdot 1 + 3x^2 = \underline{3x^2 - 3y} = 0 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x \cdot 1 = \underline{-3x + 3y^2} = 0 \end{matrix}\right\} \text{stasj. pkt}$$

$\underline{y = x^2}$ fra (1)

(2): $-3x + 3(x^2)^2 = 0$

$-3x + 3x^4 = 0$

$\underline{3x}(-1 + x^3) = 0$

$\underline{x=0}$ eller $-1 + x^3 = 0$

$\underline{y=0}$ $\quad x^3 = 1$

$\underline{x = 1}$

$\underline{y = 1}$

Stasjonære pkt:

$(x,y) = \underline{(0,0)}, \ \underline{(1,1)}$

Resultat:

Et maksimum/minimumspkt for $f(x,y)$ er enten

i) Et stasjonært pkt for f

ii) Et pkt der f'_x eller f'_y ikke fins

iii) Et randpkt for D_f

Eks: $f(x,y) = y^3 - 3xy + x^3$

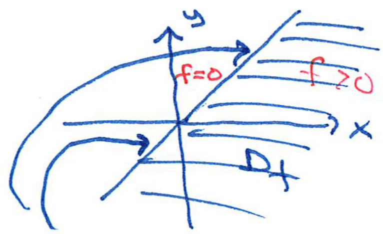
Kandidatpkt: $(x,y) = (0,0)$, $(1,1)$

$f(0,0) = 0$ $\quad f(1,1) = -1$

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x-y} = \sqrt{u}$, $u = x - y$ $\quad$ ($u^{1/2}$)

D_f: $x - y \geq 0$

$x \geq y$



$f'_x = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 1$

$= \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$

randpkt for D_f: $x = y$

Stasjonære pkt: $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{x-y}} = 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} = 0 \end{array}\right\}$ ingen stasj. pkt.

pkt der f'_x / f'_y ikke fins: $x = y$

Kandidatpkt: Alle pkt med $x = y$ $\quad f = 0$

$f_{min} = 0$ i alle pkt med $x = y$

Eks: $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{u}{v}$, $D_f: x \neq y$

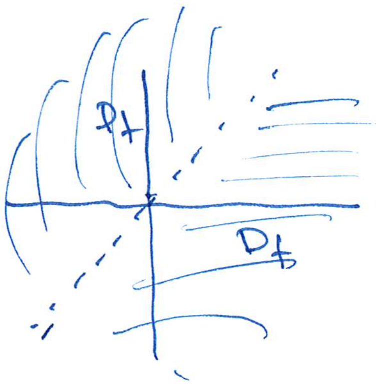
$$f'_x = \frac{u'_x v - u v'_x}{v^2} = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$f'_y = \frac{u'_y v - u v'_y}{v^2} = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

Stasj. pkt: $\dfrac{-2y}{(x-y)^2} = 0 \quad -2y = 0 \quad \underline{y=0}$

$\dfrac{+2x}{(x-y)^2} = 0 \quad 2x = 0 \quad \underline{x=0}$

ingen stasjonære pkt



ingen kandidatpkt

3 Andrederiverte og Hessematrisen

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y \qquad f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = -3$

$f'_y = -3x + 3y^2 \qquad f''_{yx} = -3 \qquad f''_{yy} = 6y$

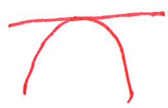
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{andreordens partiellderiverte}}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \leftarrow \text{Hesse-matrisen}$$

$f(x)$ konveks $f'' > 0$

stasjonære = min

konkav $f'' < 0$



stasjonære = max