	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning		
2	Noen nyttige regneregler for matriser	[E] 6.6	
3	Inverse matriser	[E] 6.7	[E] 6.7.1 - 6.7.3

① Repetisjon.

Matriseregning: $A+B$, $A-B$, rA

Multiplikasjon: $\underset{m\times n}{A}, \underset{n\times p}{B} \rightsquigarrow \underset{m\times p}{A\cdot B}$ $\quad AB \neq BA$

Transponering: $\underset{m\times n}{A} \rightsquigarrow \underset{n\times m}{A^T}$

Identitetsmatrisen: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A\cdot I = A$, $I\cdot A = A$

② Noen nyttige regneregler for matriser

Transponering: $\boxed{(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T}$

$(A\pm B)^T = A^T \pm B^T$

$(A^T)^T = A$

Oppgaveark: 5b

$(A^T\cdot A)^T = A^T\cdot (A^T)^T$

$= A^T\cdot A \Rightarrow A^TA$ er symmetrisk

Determinant: $\boxed{|A\cdot B| = |A|\cdot |B|}$

$|rA| = r^n\cdot |A|$ når A er $n\times n$-matrise

$|A^T| = |A|$

$|A| = 0$ hvis

i) A har en nullrad
ii) A har to like rader
iii) A har en rad som er en lin. komb. av de andre radene

og helt tilsvarende for kolonner

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\cdot(-1)$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $R(2) = -1\cdot R(1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $R(3) = R(1) + R(2)$ $\cdot(-1)$ $\cdot(-1)$ 0

Eks: Regn ut når $\begin{vmatrix} 1 & t & 2 \\ t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$

Ser at: $t=1$: $|A|=0$

$1\cdot(2t-2) - 1\cdot(2-2t) + t(1-t^2) = 0$

$2t - 2 - 2 + 2t + t - t^3 = 0$

$-t^3 + 5t - 4 = 0$

$(t-1)(-t^2 - t + 4) = 0$ $\quad \underline{\underline{t=1}}$ eller $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)\cdot 4}}{-2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{-2}$

Polynomdivisjon: $(-t^3 + 5t - 4) : (t-1) = -t^2 - t + 4$

$$\begin{array}{l} -t^3 + 5t - 4 \\ \underline{-t^3 + t^2} \\ \quad -t^2 + 5t - 4 \\ \quad \underline{-t^2 + t} \\ \qquad 4t - 4 \\ \qquad \underline{4t - 4} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Regneregler for matrisemultiplikasjon:

$AB \neq BA$ ← Husk:

AB kan være null selv om $A \neq 0$ og $B \neq 0$

Men: $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B)$

$= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$

$= \underline{A^2 + AB + BA + B^2}$

$ab = 0$: $\underline{a=0}$ eller $\underline{a \neq 0}$

$ab = 0 \quad |:a$

$\underline{b = 0}$

③ Inverse matriser

A $m\times n$-matrise

Defn: En invers matrise for A er en matrise A^{-1} slik at

$$A\cdot A^{-1} = I$$
$$A^{-1}\cdot A = I$$

Dvs: Vi løser likningene $AX=I$ og $X\cdot A=I$, og kaller løsningen $X=A^{-1}$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$\underset{X}{\underset{\shortparallel}{A\cdot A^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 2x+z & 2y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x \quad\quad +2z \quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad + 2w &= 0 \\ 2x \quad\quad + z \quad\quad &= 0 \\ 2y \quad\quad + w &= 1 \end{aligned}$$

-2 $\quad$ -2

$$\begin{aligned} x \quad\quad +2z \quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad +2w &= 0 \\ -3z \quad\quad &= -2 \\ -3w &= 1 \end{aligned}$$

$z = 2/3 \qquad w = -1/3$

$x = 1-2\cdot 2/3 \qquad y = 2/3$
$= -1/3$

én løsning.

løsn. av $AX=I$ $\rightarrow$ $X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$XA = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{X}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Konklusjon:

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ er den inverse matrisen til A

<u>Resultat:</u>

A $m \times n$-matrise

i) A har en invers matrise hvis og bare hvis $m = n$ <u>og</u> $|A| \neq 0$. I så fall kalles A <u>invertibel</u>.

ii) Hvis A er invertibel, så er A^{-1} entydig.

iii) Hvis A er invertibel, så er

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^T}_{\operatorname{adj}(A)} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

<u>Eks:</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2×2, $|A| = 1 - 4 = -3 \neq 0$ <u>A invertibel</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

$C_{11} = +1$ $C_{12} = -2$

$C_{21} = -2$ $C_{22} = +1$

<u>Eks.</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $|A| = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow$ A invertibel

<u>Hvis A invertibel:</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}}$$

$C_{11} = +d$ $C_{12} = -c$

$C_{21} = -b$ $C_{22} = +a$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $|A| = 1\cdot 5 - 3\cdot 2 = 5-6 = \underline{-1} \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}}$

Merk: Hvis A er kvadratisk og $\underline{A\cdot X = I}$ har en løsning X, så er $X\cdot A = I$.

Eks: $7x - 5y = 34$ $\Longleftrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{b}$ på matriseform

$3x + 13y = 57$ $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 34 \\ 57 \end{pmatrix}$

2x2 lin. system

$A\underline{x} = \underline{b}$ $|A^{-1}\cdot$ Anta at A er invertibel, dvs A^{-1} fins

$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\cdot\underline{b}$ $|A| = 7\cdot 13 - (-5)\cdot 3 = 106 \neq 0$

$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{x} = \underline{A^{-1}\underline{b}} = \underbrace{\frac{1}{106}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 34 \\ 57 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$= \frac{1}{106}\begin{pmatrix} 13\cdot 34 + 5\cdot 57 \\ -3\cdot 34 + 7\cdot 57 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{13\cdot 34 + 5\cdot 57}{106}$$

$$y = \frac{-3\cdot 34 + 7\cdot 57}{106} \quad //$$