	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Vektorer og vektorregning	[E] 6.5	[E] 6.5.1 - 6.5.2
2	Vektorlikninger	[E] 6.5	[E] 6.5.3 - 6.5.4

① Vektorer og vektorregning

Defn: En vektor (kolonnevektor) er en matrise med bare en kolonne. Vi skriver

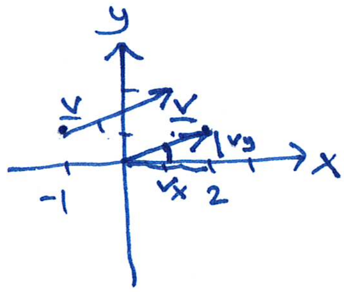
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

v_i : i'te komponent av vektoren $\underline{v}$

Vi kaller også $\underline{v}$ en n-vektor.

Geometrisk representasjon:

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2-vektor



$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Vektor = størrelse + retning

Lengden til en vektor: $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

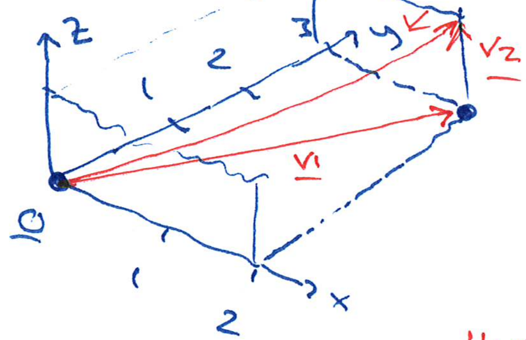
Generelle n-vektorer: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Lengden til vektoren: $\boxed{\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}}$

Eks:

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v_2}}$



$\|\underline{v_2}\| = 1$

$\|\underline{v_1}\| = \sqrt{2^2 + 3^2}$

$= \sqrt{13}$

$\|\underline{v}\| = \sqrt{\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$

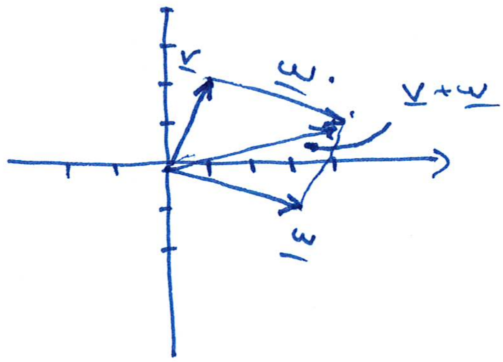
Addisjon / subtraksjon av vektorer:

$\underline{v} \pm \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \pm w_1 \\ v_2 \pm w_2 \\ \vdots \\ v_n \pm w_n \end{pmatrix}$.

når $\underline{v}, \underline{w}$ har like mange komponenter (n)

Eks:

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 3-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

Skalarmultiplikasjon av vektorer

Skalar = et tall

$$r \cdot \underline{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r v_1 \\ r v_2 \\ \vdots \\ r v_n \end{pmatrix}$$

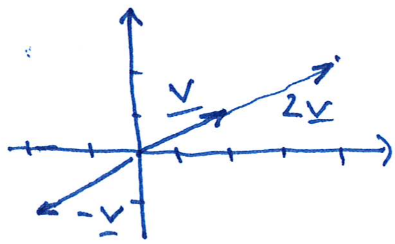
Eks:

$$2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{v}} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}} = 2\underline{v}$$

Samme retning som $\underline{v}$, lengden er $\times 2$

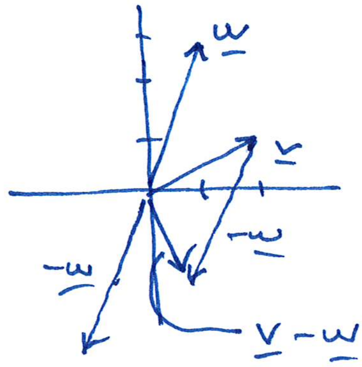
$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}} = -\underline{v}$$

Motsatt retning av $\underline{v}$, samme lengde



Merk: $\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-1) \cdot \underline{w}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{v}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{= \underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Lineærkombinasjoner av vektorer:

$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_r}$: n-vektorer

Defn: En lineærkombinasjon av vektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_r}$ er et uttrykk på formen

$$c_1 \cdot \underline{v_1} + c_2 \cdot \underline{v_2} + \cdots + c_r \cdot \underline{v_r}$$

der $c_1, c_2, \ldots, c_r$ er skalarer (tall)

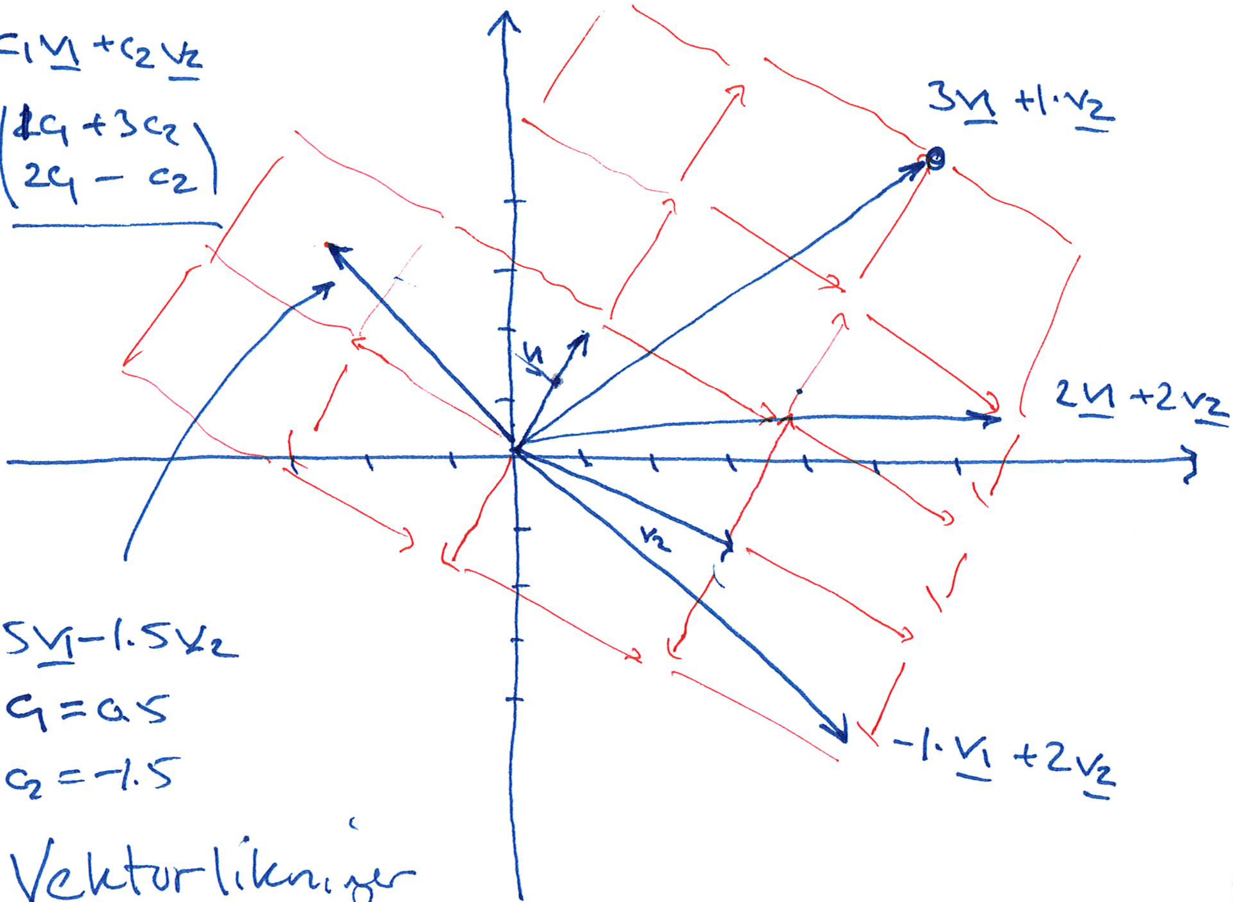
Eks: $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 - c_2 \end{pmatrix}$$

lin. komb. av $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$

$c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2}$

$= \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 - c_2 \end{pmatrix}$



$0.5\underline{v_1} - 1.5\underline{v_2}$

$c_1 = 0.5$

$c_2 = -1.5$

2 Vektorlikninger

Er $\begin{pmatrix} 17 \\ -32 \end{pmatrix}$ en lineærkomb. av $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$? Ja.

$-\frac{79}{7}\cdot\underline{v_1} + \frac{66}{7}\cdot\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 17 \\ -32 \end{pmatrix}$

$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -32 \end{pmatrix} \longleftarrow$ vektorlikning

$\begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -32 \end{pmatrix}$

$c_1 + 3c_2 = 17$
$2c_1 - c_2 = -32$

Gauss

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 17 \\ 2 & -1 & -32 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 17 \\ 0 & -7 & -66 \end{array}\right)$$

$c_1 + 3c_2 = 17$
$-7c_2 = -66$

$\frac{-7c_2}{-7} = \frac{-66}{-7}$

$c_2 = 66/7$

$c_1 + 3(66/7) = 17$

$c_1 = 17 - \frac{198}{7} = \frac{119}{7} - \frac{198}{7} = -\frac{79}{7}$

Konklusjon: i) $\begin{pmatrix}17\\-32\end{pmatrix} = -\frac{79}{7}\underline{v_1} + \frac{66}{7}\underline{v_2}$ er en lin. komb. av $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ på én måte

ii) Alle 2-vektorer er en lineærkomb. av $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$ på én måte.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -7 & b-2a \end{array}\right)$$

trappeform.

én entydig løsning for alle a, b

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 \\ b & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-a-3b}{-7} = \underline{\underline{\frac{a+3b}{7}}}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{b-2a}{-7} = \underline{\underline{\frac{2a-b}{7}}}$$

Eks: $\underline{\underline{\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = -\frac{3}{7}\underline{v_1} + \frac{15}{7}\underline{v_2}}}$

Defn: $\text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_r})$ = mengden av alle lin. komb. av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_r}$

Eks: $\text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2})$ = alle 2-vektorer $= \mathbb{R}^2$

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

Eks: Vi skal kjøpe en aksjeportefølje.
Vi kan investere aksjer i selskap A, B, C

	A	B	C
kostpris per aksje	68	15	123
Scenario 1	70	20	125
Scenario 2	65	2	90
Scenario 3	80	12	140
pris/aksje			
gevinst per aksje	$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$	$\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -33 \\ 17 \end{pmatrix} = \underline{v_3}$

Anta at vi kjøper x aksjer i A
y " i B
z " i C

Gevinst: $$x\underline{v_1} + y \cdot \underline{v_2} + z\underline{v_3} = \underbrace{x\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ -33 \\ 17 \end{pmatrix}}_{\text{lin. komb av } \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\,!}$$