	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Determinanter	[E] 6.4	[E] 6.4.1 - 6.4.4
2	Determinanter og lineære systemer	[E] 6.4	[E] 6.4.5 - 6.4.7

1 Determinanter

A (n×n-matrise (kvadratisk)) $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ et tall

Eks: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc}$

Motivasjon:

Vi ser på et lineært system med like mange likninger som ukjente ; n×n lineært system

n likn.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

n ukjente $x_1, \dots, x_n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = ?$$

Koeffisientmatrisen til det lineære systemet, n×n-matrise (kvadratisk)

Eks:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{2×2-koeff. matrise}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right) \xrightarrow[a \neq 0]{\cdot(-c/a)} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & f - \frac{ec}{a} \end{array}\right) \cdot a$$

utvidet matrise

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & ad - bc & af - ce \end{array}\right)$$

$\det(A) = ad - bc \neq 0$: én løsning (én entydig løsning)

$ad - bc = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & 0 & af - ce \end{array}\right)$$

$af - ce \neq 0$: ingen løsning

$af - ce = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y fri
uendelig mange løsninger

Konkl: $ad - bc \neq 0 \iff$ én entydig løsning, der $ad - bc = \det(A)$

Generelt: Et $n \times n$ lineært system med koeff. matrise A har en entydig løsning hvis og bare hvis $|A| \neq 0$.

Eks:

$$2x - 7y = 35$$
$$14x + 8y = 16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 14 \cdot (-7) = 16 + 98 = \underline{114} \neq 0$$

én entydig løsning

Eks:

$$x + y + z = 3$$
$$x - y + z = 1$$
$$x + 2y + 4z = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \cancel{2} = \underline{\underline{-6}} \neq 0$$

en entydig løsn.

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right)$$
$$x \quad y \quad z$$

en pivotposisjon i hver variabel/kolonne (pivoter i hele hoveddiagonalen)

$\Updownarrow$

én entydig løsning

Metode for å beregne determinant

$$\underset{n \times n}{A} \qquad |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

formel, ikke så lett å bruke

i) **Kofaktorutvikling**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$
$$= 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= +1 \cdot (-4 - 2) - 1 \cdot (4 - 1) + 1(2 + 1)$$
$$= -6 - 3 + 3 = \underline{\underline{-6}}$$

$$C_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{fortegn}} \cdot \underbrace{M_{ij}}_{\text{minor}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

minor: determinanten til matrisen vi får ved å slette rad i, kol j

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(4-1) - 1(4-1) - 2(1-1)$$

$$= -3 - 3 = \underline{\underline{-6}}$$

Kofaktorutvikling langs andre kolonne

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Fakta: Kofaktorutvikling langs en hvilken som helst rad eller kolonne gir samme svar, $\underline{\det(A)}$.

ii) <u>Vha Gauss-eliminasjon</u>

Eks:

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right| \xrightarrow{\cdot(-1),\ \cdot(-1)} \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

<u>trappeform</u>

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right| = +1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = +1\cdot\left(+(-2)\cdot 3\right) = 1\cdot(-2)\cdot 3 = \underline{-6}$$

Def: En kvadratisk matrise er øvre triangulær hvis alt under hoveddiagonalen er null.

Fakta:

i) determinanten til en <u>øvre triangulær matrise</u> er produktet av elementene på diagonalen, og alle trappeformer er øvre triangulære

ii) elementære radoperasjoner av type (iii), dvs å legge til et multippel av en rad til en annen rad, endrer <u>ikke</u> determinanten

iii) Hvis vi bytter om to rader, bytter determinanten fortegn
Hvis vi mult. en rad med $c \neq 0$, blir determinanten ganget med c.

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \; 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det = 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -3$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; -2 \;\; -1 \;\; -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; -2$$

Kofaktor utvikling

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \Big(1(21-4) - 1(7+1) + 1(4+3) \Big) + \ldots + 3 \cdot \ldots$$

Gauss:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1(-1) \cdot 1 \cdot 10 = \underline{\underline{-10}}$$