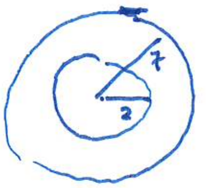
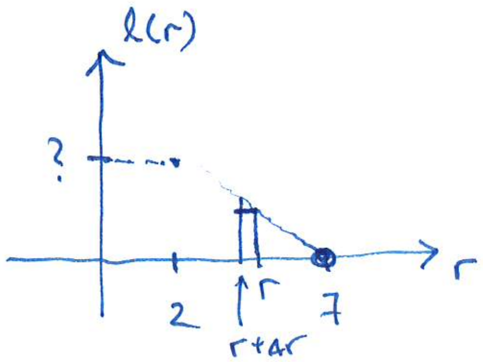
	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Systemer av likninger	[E] 6.1	6.1.1 - 6.1.6
2	Lineære likningssystemer	[E] 6.2	6.2.1 - 6.2.5

Oppgaveark 30, Opgs 11



$\tau = 0.05$



r : radius (cm)

$l(r)$: lengden (cm) når radius er

$r \longmapsto r + \Delta r$

$$\Delta l = -\frac{\Delta r}{0.05} \cdot 2\pi r \qquad \frac{\Delta l}{\Delta r} = -\frac{2\pi r}{0.05}$$

antall runder

ekstra lengde per runde

$$l(2) - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{l(7)} = \int_2^7 \frac{2\pi r}{0.05}\, dr = \frac{2\pi}{0.05}\left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_2^7 = \dots$$

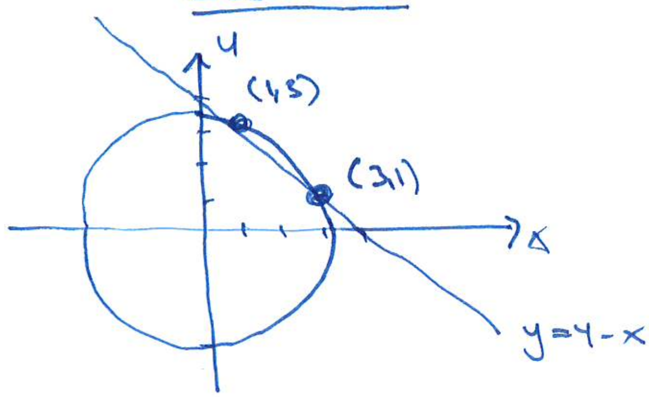
① Systemer av likninger

Eks: $x^2+y^2=10 \quad (1)$ grad 2: sirkel, $C=(0,0)$, $r=\sqrt{10}$

$x+y=4 \quad (2)$ grad 1: $y=4-x$ rett linje

Innsettingsmetoden:

Geometrisk:



(2) $x+y=4$

$y=\underline{4-x}$

(1) $x^2+(4-x)^2=10$

$x^2+16-8x+x^2=10$

$2x^2-8x+16-10=0 \quad |:2$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=1,\ y=3 \quad \Big\} \quad x=3,\ y=1$

> $x^2-px+q=0$
> har løsning x_1 og x_2
> hvis $x_1+x_2=p$
> $x_1\cdot x_2=q$
> Viètes formel

Løsn: $(x,y)=(1,3),\ (3,1)$

Resultat: "Forventet" / max antall løsn = grad av likn 1 · grad av likn 2

Eks: $x^2+y^2=10$, $xy=3$

Innsettingsmetoden: $y=3/x$

$x^2+(3/x)^2=10$

$x^2+9/x^2=10 \quad |\cdot x^2$

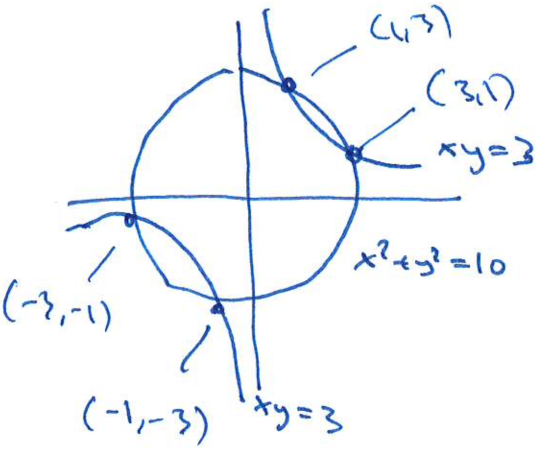
$x^4+9=10x^2$

$\rightarrow x^4-10x^2+9=0$

$u^2-10u+9=0 \qquad u=x^2$

$(u-9)(u-1)=0$

$x^2=9$ eller $x^2=1$



$x = \pm 3$ eller $x = \pm 1$

$x=3,\ x=-3,\ x=1,\ x=-1$
$y=1 \quad y=-1 \quad y=3 \quad y=-3$

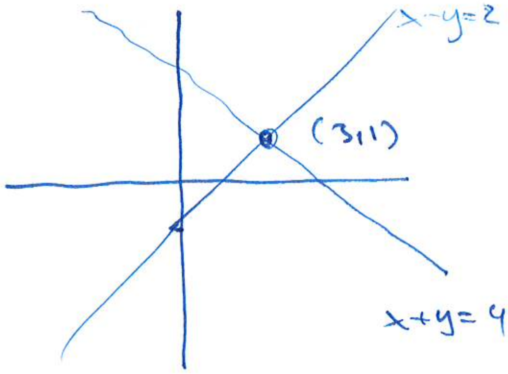
Løsn: $(x,y) = (3,1),\ (1,3),\ (-3,-1),\ (-1,-3)$

(2) Lineære system = lineære likningssystem

Defn: Et $m \times n$ lineært system er et likningssystem med m likninger og n ukjente der alle likninger er lineære.

Eks:
$$x+y=4 \qquad y = 4-x$$
$$x-y=2 \qquad x-(4-x)=2$$
$$2x = 6$$
$$x=3,\ y=1$$

$y = x-2$



Løsn: $(x,y) = (3,1)$

Eks:
$$x+y+z=3$$
$$x+2y+4z=7$$
$$x+3y+9z=13$$

3×3 lineært system

(1) $z = 3-x-y$

(2) $x+2y+4(3-x-y)=7$
$-3x-2y=-5$

(3) $x+3y+9(3-x-y)=13$
$-8x-6y=-14$

$$\boxed{\begin{aligned} -3x - 2y &= -5 \\ -8x - 6y &= -14 \end{aligned}}$$

$$-2y = -5 + 3x \qquad y = \frac{-5+3x}{-2} = \underline{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x}$$

$$-8x - 6\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x\right) = -14$$

$$-8x - 15 + 9x = -14$$

$$x = 15 - 14 = \underline{1}$$

$$y = 5/2 - 3/2 \cdot 1 = 2/2 = \underline{1}$$

$$z = 3 - 1 - 1 = \underline{\underline{1}}$$

<u>Løsn:</u> $(x,y,z) = \underline{\underline{(1,1,1)}}$

<u>Metode:</u> Gauss-eliminasjon

generell metode for å løse alle lineære lign. system

mye enklere enn innsetting når systemet er større enn 2x2

<u>Eks:</u>

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 13 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \\ \uparrow\ \text{x-kol.} \quad \uparrow\ \text{y-kol.} \quad \uparrow\ \text{z-kol.} \quad \uparrow\ \text{konst.} \end{array}}_{\text{den utvidede koeffisientmatrisen til det lin. systemet}}$$

én rad = én likn.

<u>Steg 1:</u> skriv ned koeff-matrisen

<u>Steg 2:</u> gjør om den utvidede matrisen til en <u>trappeform</u> vha <u>elementære radoperasjoner</u>

<u>Elementære radoperasjoner:</u>

i) Bytte om to rader

ii) Multiplisere én rad med $c \neq 0$

iii) Legge til et multippel av én rad til én annen rad.

Eks:

ønsker å få null

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \cdot(-1) \qquad (-1\ -1\ -1 \mid -3)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \cdot(-2) \qquad (0\ -2\ -6 \mid -8)$$

ønsker å få null

Defn: Pivot = første tall ulik null i en rad

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & = \text{konst} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

trappeform

$\updownarrow$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 & x+1+1&=3 & x&=1 \\ y + 3z &= 4 & y+3&=4 & y&=1 \\ 2z &= 2 & & & z&=1 \end{aligned}$$

En matrise er på trappeform hvis

i) alle nullrader er nederst i matrisen

ii) hver pivot står lenger til høyre enn pivotene i radene over

Steg 3: Baklengs substitusjon

Løsning: $(x,y,z) = (1,1,1)$

Eks:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + 4y &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{array}\right) \cdot 2 \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 0\cdot x + 0 \cdot y &= 13 \end{aligned}$$

ingen løsn. pga

Konkl: Pivot posisjon i siste kolonne = ingen løsning.

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

Eks: $x + y - z = 4$

$2y + 3z = 12$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

trappeform

Ingen pivot i z-kolonnen = uendelig mange løsninger

z er en fri variabel

$$2y + 3z = 12$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{12 - 3z}{2} \qquad y = 6 - \frac{3}{2}z$$

$$x + \left(6 - \frac{3}{2}z\right) - z = 4$$

$$x = 4 - 6 + \frac{5}{2}z = -2 + \frac{5}{2}z$$

Løsn: $x = -2 + \frac{5}{2}z$

$y = 6 - \frac{3}{2}z$

$z = \text{fri}$