MET 1180, 3. forelesning, 28. Aug. 2025, Runar Ile

Plan
1. Noen eksempler
2. Fremtidsverdi, nåverdi
3. Den totale nåverdien til en kontantstrøm
4. Internrente

---

1. Noen eksempler

Eks Verdien av Kåres leilighet øker med 10% det første året og faller med 30% det andre året. Beregn den relative verdiendringen for disse to årene tilsammen.

(Hint: svaret er ikke -20%)

Løsning

Relativ verdiendring første år: $r_1 = 0{,}1$

—— " —— andre år: $r_2 = -0{,}3$

Vekstfaktor for det første året: $1 + r_1 = 1{,}1$

—— " —— andre —"—: $1 + r_2 = 0{,}7$

—— " —— de to årene tilsammen:

$$(1+r_1)\cdot(1+r_2) = 1{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}77$$

Så relativ verdiendring for de to årene tilsammen er $0{,}77 - 1 = -0{,}23 = \underline{\underline{-23\%}}$

Mønster Relative verdiendringer: $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gir den samlede relative verdiendringen

$$\underbrace{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)}_{\text{vekstfaktor for den samlede endringen}} - 1$$

Oppg Innskudd: 50 000

Nominell rente: 4 %

Månedlig forrentning.

a) Beregn balansen etter 5 år.

b) Bestem den effektive renten.

Løsning Månedsrenten er $\frac{4\%}{12} = \frac{1}{3}\%$ ($\neq 0{,}003, \neq 0{,}0033$)

a) Etter 5 år er balansen

$$50000 \cdot \left(1 + \frac{4\%}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{60}$$

$$= \underline{\underline{61\,049{,}83}}$$

b) Effektiv rente r_{eff} = den årlige renten som gir den samme balansen

= den årlige relative verdiendringen.

Den årlige vekstfaktoren er

$$1 + r_{eff} = \left(1 + \frac{4\%}{12}\right)^{12} = 1{,}040742$$

Så $r_{eff} = 0{,}040742 = \underline{\underline{4{,}0742\,\%}}$

Oppg Etter 5 år med renter (årlig forrentning) har innskuddet på 50 000 vokst til 60 000. Beregn den effektive renten. (= renten)

Løsning Den 5-årige vekstfaktoren er

$\frac{60000}{50000} = 1,2$. La g være årlig vekstfaktor.

Da er $g^5 = 1,2$. Så $g = \sqrt[5]{1,2} = 1,2^{0,2} = 1,03714$

og $r_{eff} = g - 1 = 0,03714 = \underline{\underline{3,714\%}}$

2. Fremtidsverdi, nåverdi

La K_0 være en investering/innskudd/betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (el. terminer) med terminrente r

er $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$

Omvendt Anta K_n skal betales om n år Da er nåverdien K_0 av K_n med rente r

gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Eks Bestem nåverdien av 30 mill. betalt om 5 år med 8% rente.

Løsning $K_0 = \frac{30 \text{ mill}}{1,08^5} = \underline{\underline{20,42 \text{ mill}}}$

Start: 9.00

Oppg Bestem nåverdien av 50 000 betalt 3 år fra nå med 4% rente.

Løsning $$\frac{50\,000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449{,}82}}$$

Kalk. 50000 $\boxed{\div}$ 1,04 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$

Nåverdien til et beløp (K) som betales n år fra nå med rente r

= hva du må sette på konto i dag (K_0) for at balansen skal være K om n år hvis renten er r.

---

3. Den totale nåverdien til en betalingstrøm

Eks Du betaler 20 mill. i dag, og får tilbake

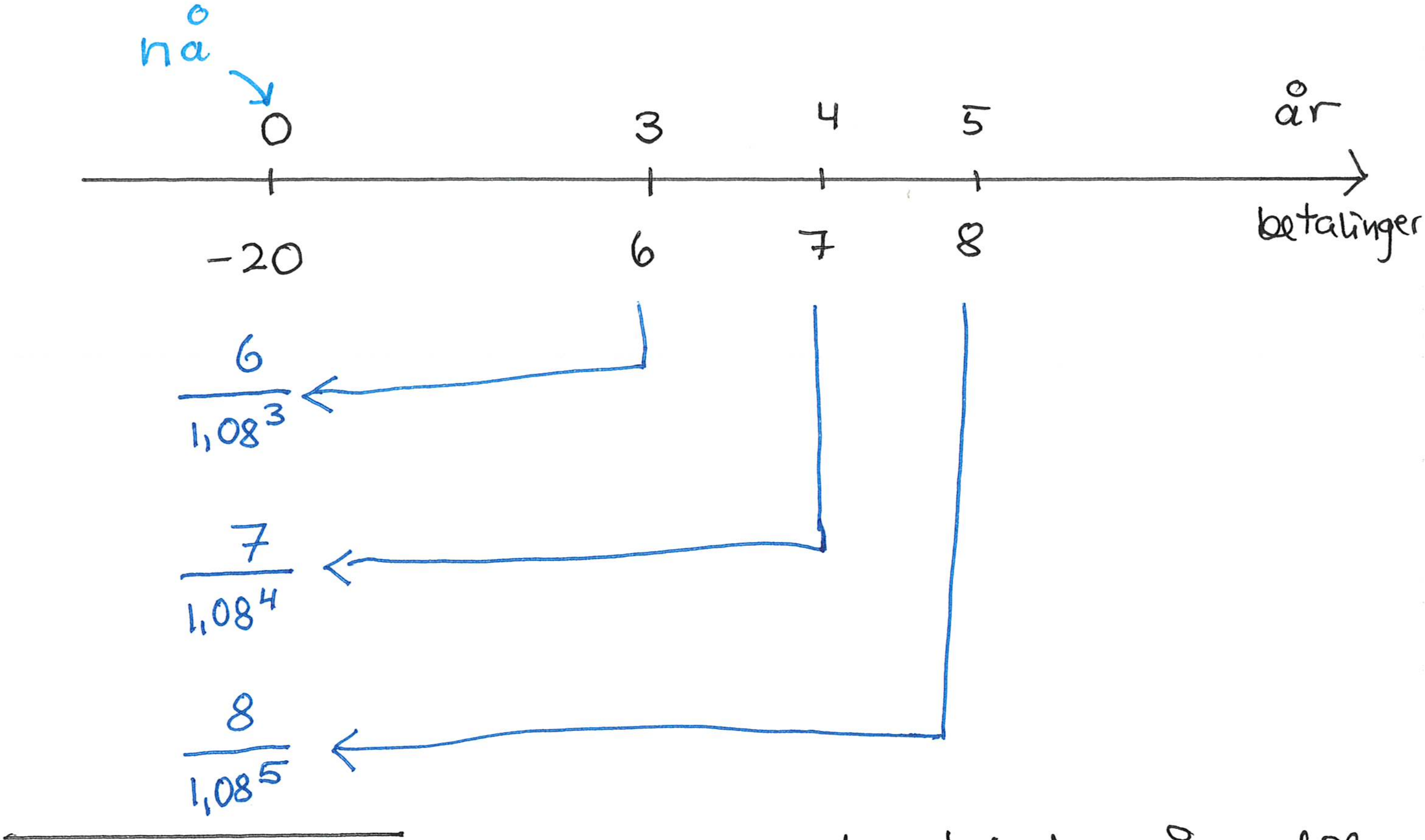
6 mill etter 3 år

7 mill etter 4 år

8 mill etter 5 år

Med 8% rente, hva er (den totale) nåverdien av kontantstrømmen?

Det er summen av nåverdiene til hver av betalingene.



Summen av nåverdiene = den totale nåverdien av kontantstrømmen

$$= -20 + \frac{6}{1,08^3} + \frac{7}{1,08^4} + \frac{8}{1,08^5} = \underline{\underline{-4,65}}$$

<u>Noen tolkninger</u>

1) Får ikke 8 % avkastning på denne investeringen

2) Med disse tilbakebetalingene kan låntager få låne 15,35 mill (ikke 20).

3) Låntager kan betale mer (og få låne 20) f.eks. $4,65 \cdot 1,08^6$ mill ekstra etter 6 år

- Begge disse (2 og 3) nye kontantstrømmene har nåverdi 0. Dette er da balanserte låneavtaler.

4. Internrente

Internrenten til en kontantstrøm er den renten som gjør at nåverdien til kontantstrømmen blir 0.

- Generelt vanskelig å beregne for hånd. I tilfellet over må vi løse likningen

$$-20 + \frac{6}{(1+x)^3} + \frac{7}{(1+x)^4} + \frac{8}{(1+x)^5} = 0$$

Svar: $x \approx 1,12\ \%$ - gjette - og - prøve