MET 1180, forelesning 13, 7. okt. 2025, Runar Ile

Plan 1. Rasjonale funksjoner og asymptoter
2. Hyperbler

## 1. Rasjonale funksjoner og asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ polynomer

**Eks** $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3}$ høyeste grad

– vil finne ut hva som skjer når $x$ er stor

– deler på $x^2$ i teller og nevner

$$= \frac{\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)} = \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{0}{1} = 0$$

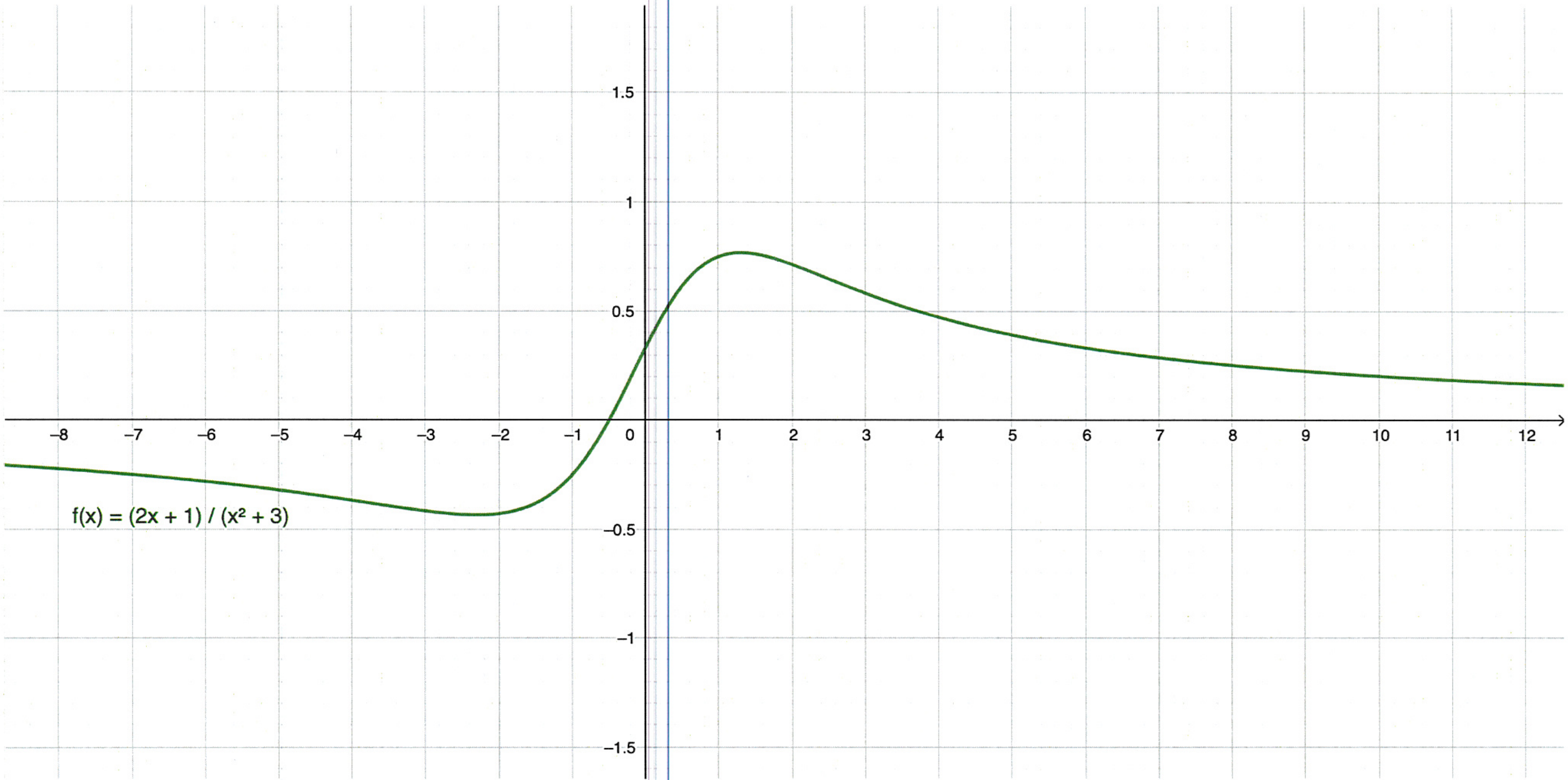
$\frac{2}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$, $\frac{3}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$$f(1000) = \frac{2\cdot 1000+1}{1000^2+3} = \frac{\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000^2}}{1 + \frac{3}{1000^2}} = 0{,}002000099\ldots$$

---

Dette betyr at linjen $\underbrace{y = 0 \ (x \text{ fri})}_{x\text{-aksen}}$ er en horisontal asymptote for $f(x)$.

Betyr: Grafen til $f(x)$ nærmer seg $x$-aksen (den horisontale asymptoten) når $x$ blir større og større (uten grense).



f(x) = (2x + 1) / (x² + 3)
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

**EKS** $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$ $(x \neq 1,\ x \neq 5)$

Hva skjer med $f(x)$ når $x$ nærmer seg 1 el. 5?

Hvis $x \to 1^-$ „ x nærmer seg 1 nedenfra"

$x = 0{,}9$ , $x = 0{,}99$ , $x = 0{,}999$, ....

da vil

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^- \\ x-5 \longrightarrow -4^- \\ 2x+1 \longrightarrow 3^- \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{\to 3^-}}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}\underbrace{(x-5)}_{-4^-}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$$

„ $\dfrac{\text{pos.}}{\text{pos.}}$ "

Hvis $x \to 1^+$ „ x nærmer seg 1 ovenifra"

$x = 1{,}1$ , $x = 1{,}01$ , $x = 1{,}001$, ...

da vil

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^+ \\ x-5 \longrightarrow -4^+ \\ 2x+1 \longrightarrow 3^+ \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{\to 3^+}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}\underbrace{(x-5)}_{-4^+}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$$

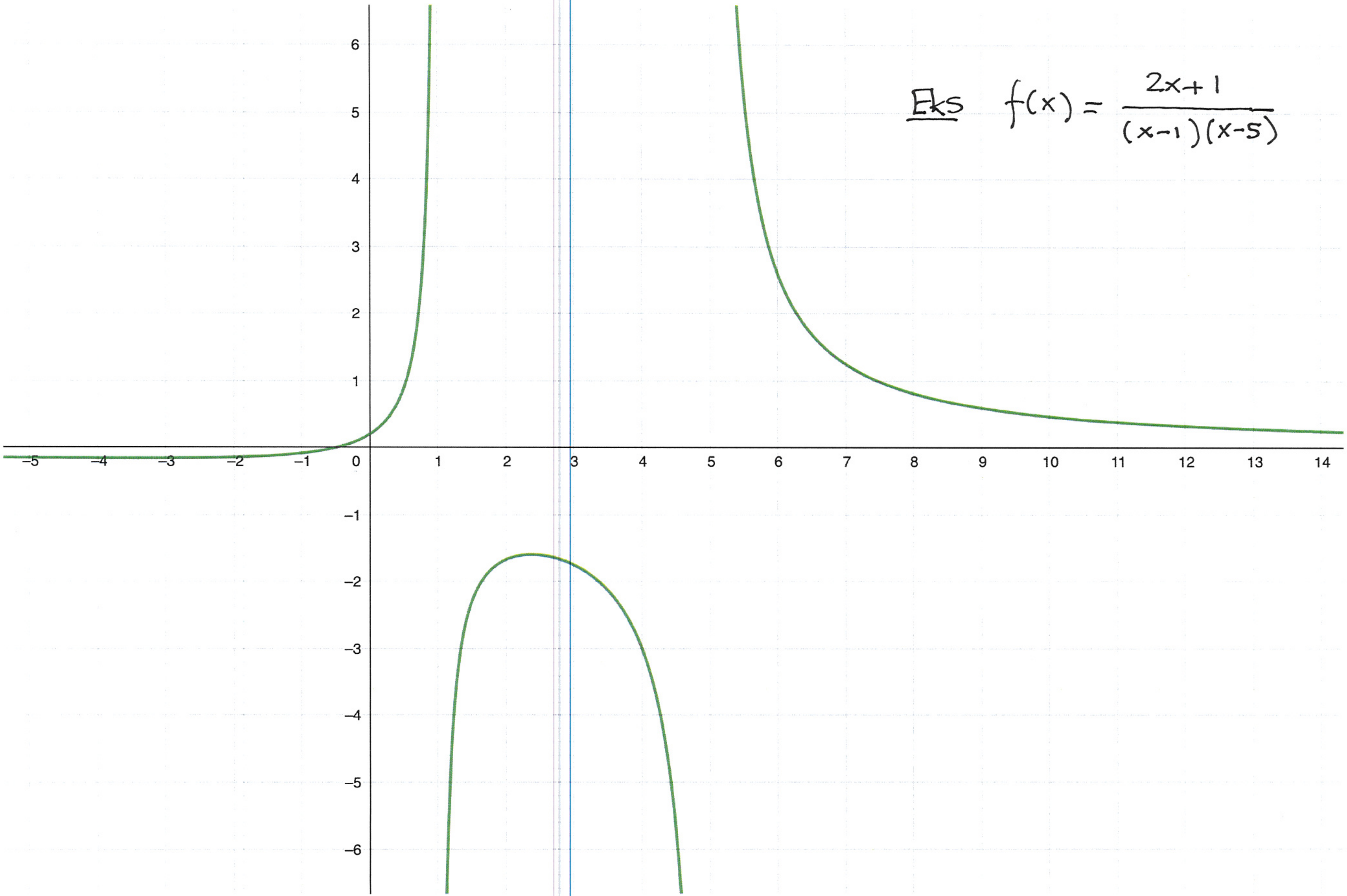
„ $\dfrac{\text{pos}}{\text{neg}}$ "

**Konklusjon** Linjen $x = 1$ (y-fri) er en vertikal asymptote for $f(x)$. Så grafen til $f(x)$ nærmer seg den vertikale linjen $x = 1$ når $x \to 1$.

**Merk** Linjen $x = 5$ er også en vertikal asymptote for $f(x)$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to 5^-]{} -\infty \quad \text{og} \quad f(x) \xrightarrow[x \to 5^+]{} +\infty$$

**Eks** $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$




2b

Dessuten har $f(x)$ den horisontale asymptoten $y = 0$ (dvs x-aksen).

## Skrå asymptoter

Eks $f(x) = x - 5 + \frac{2}{x-4}$ har en vertikal asymptote $x = 4$.

Men $f(x)$ har også en skrå asymptote:

Setter $g(x) = x - 5$.

Da vil grafen til $f(x)$ nærme seg grafen til $g(x)$ (en skrå linje) når $x \to \pm\infty$ fordi

$$f(x) - g(x) = \frac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

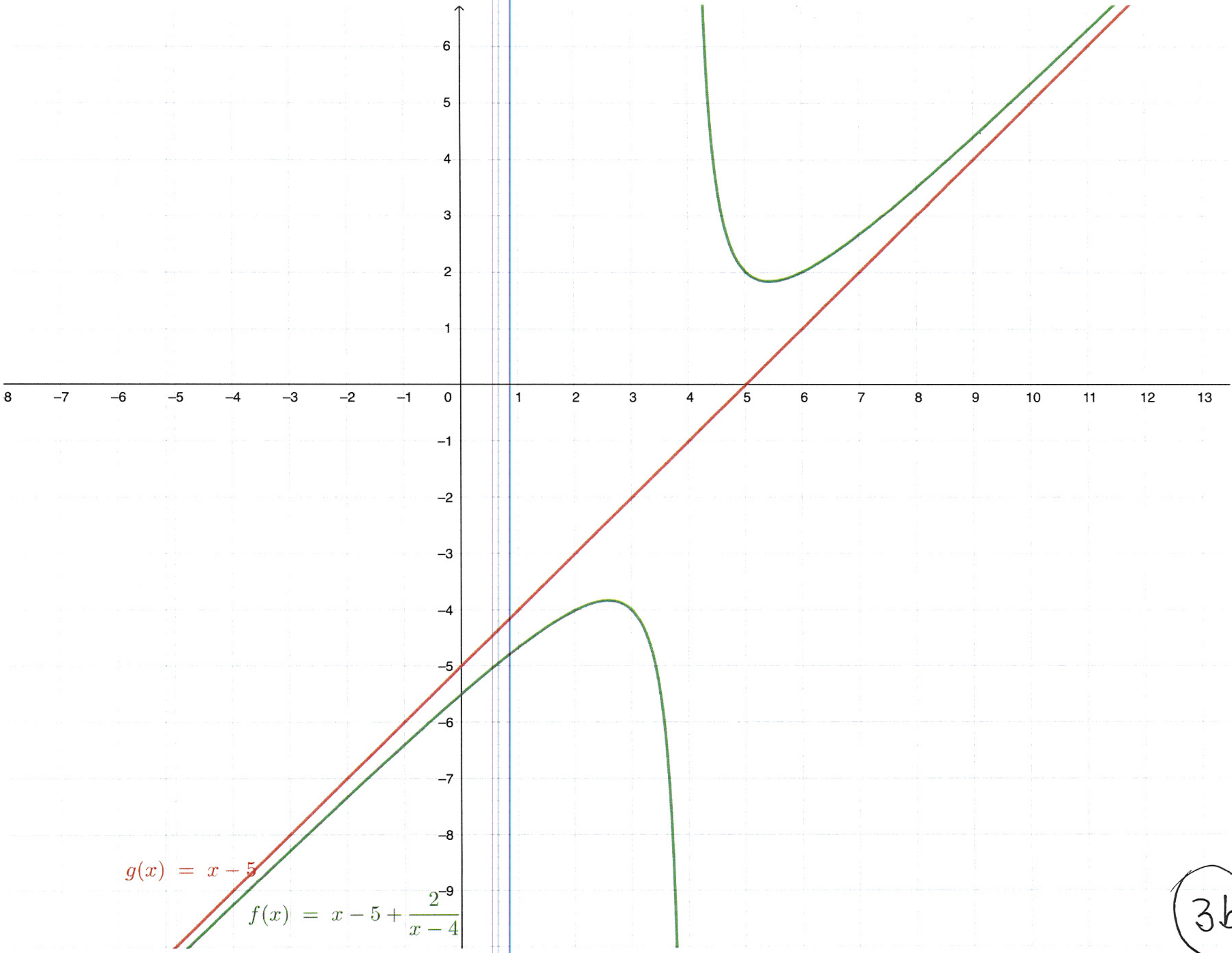
NB $f(x) = \frac{(x-5)(x-4)+2}{(x-4)} = \frac{x^2 - 9x + 22}{x-4}$

- bruker polynomdivisjon for å få formen $x - 5 + \frac{2}{x-4}$.

Grafen til $g(x)$ er en skrå asymptote for $f(x)$ fordi $f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$,

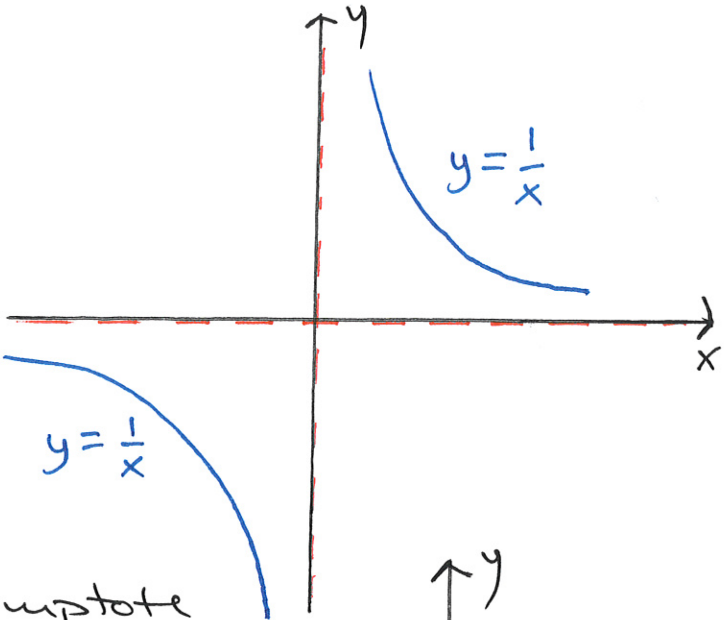
dvs grafen til $f(x)$ nærmer seg linjen $y = x - 5$.

Start: 9.03




3b

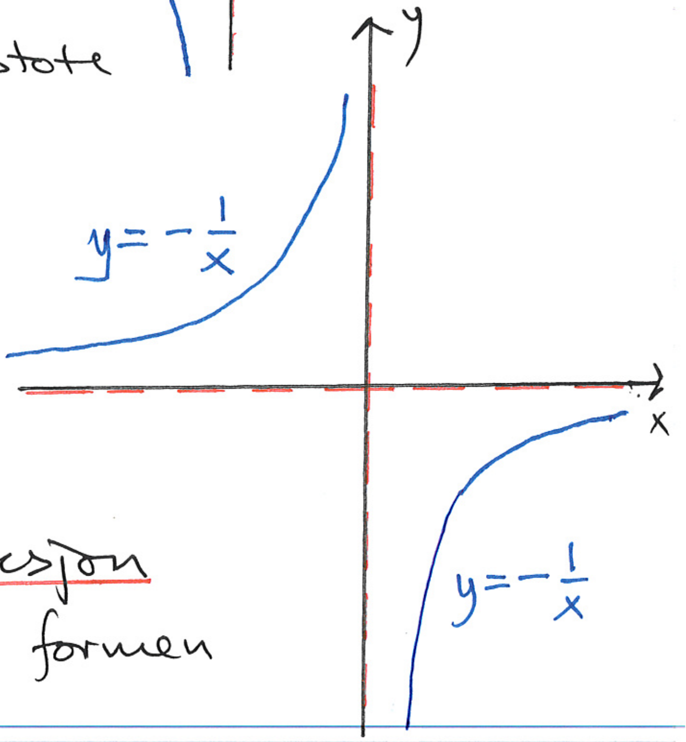
## 2. Hyperbler




__Eks__ $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

Linjen $x = 0$ (dvs y-aksen) er en vertikal asymptote

Linjen $y = 0$ (dvs x-aksen) er en horisontal asymptote




__Eks__ $f(x) = -\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

– har de samme asymptotene

__Definisjon__ En funksjon $f(x)$ er en hyperbelfunksjon hvis den kan skrives på formen

$$f(x) = c + \frac{a}{x-b} \qquad (a \neq 0)$$

__Eks__ $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ er en hyperbelfunksjon fordi polynomdivisjon gir

$$(3x - 5) : (x - 2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$

$$\underline{-(3x-6)} \quad \leftarrow \cdot (x-2)$$

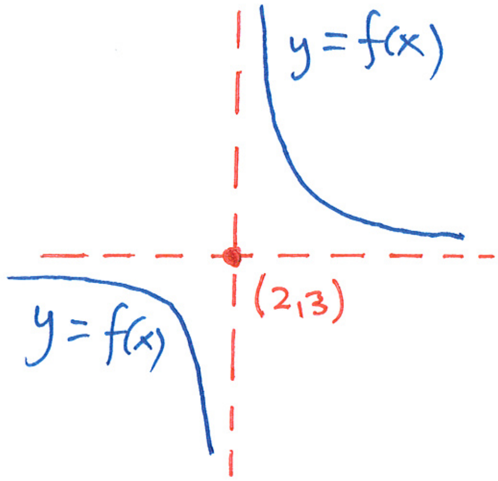
$$1$$

så $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

Vi har $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$

og $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$

og $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 3$




Så linjen $x = 2$ ($y$ fri) er en vertikal asymptote

og linjen $y = 3$ ($x$ fri) er en horisontal —"—

$f(1) = 3 + \dfrac{1}{1-2} = 2$

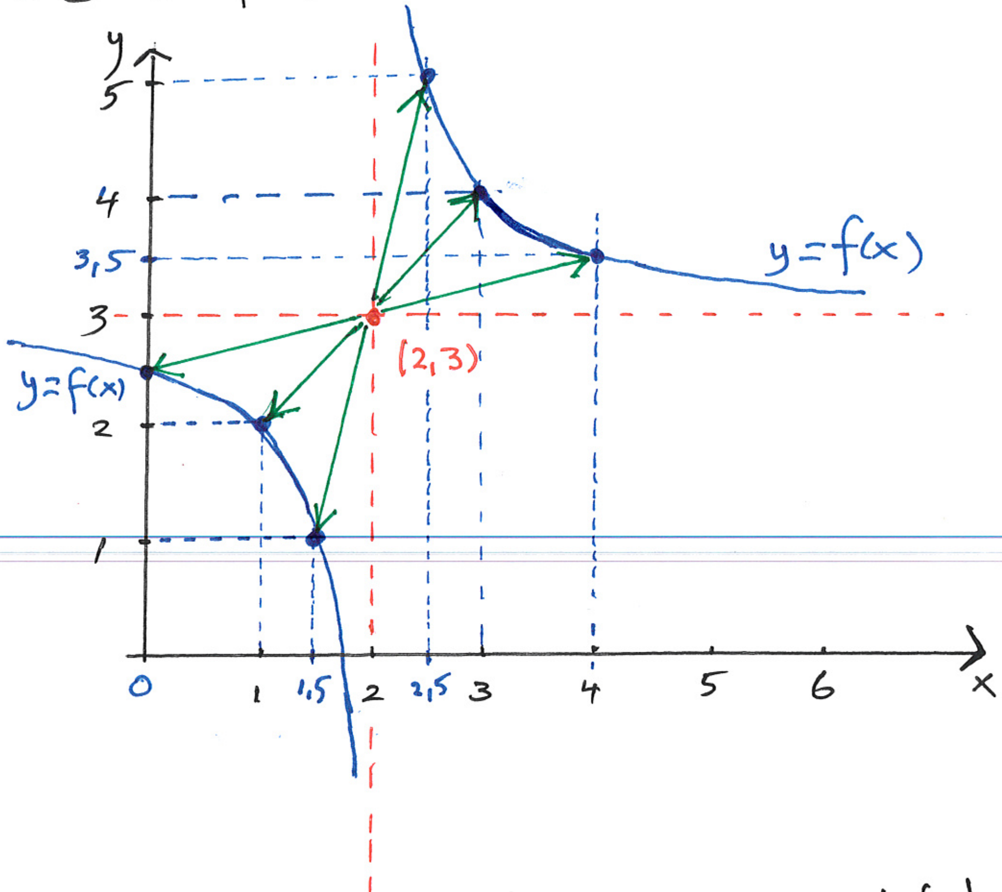
$f(3) = 3 + \dfrac{1}{3-2} = 4$

$f(1{,}5) = 3 + \dfrac{1}{1{,}5-2} = 1$

$f(2{,}5) = 3 + \dfrac{1}{2{,}5-2} = 5$

$f(0) = 3 + \dfrac{1}{0-2} = 2{,}5$

$f(4) = 3 + \dfrac{1}{4-2} = 3{,}5$




Grafen er symmetrisk om skjæringspunktet til asymptotene!

– dette kan brukes til å finne asymptotene

2019 vår Flervalg

## Problem 5

We have the hyperbola function $f(x) = \dfrac{4x-38}{x-10}$. Which of the graphs in figure 1 is the graph of $f(x)$?

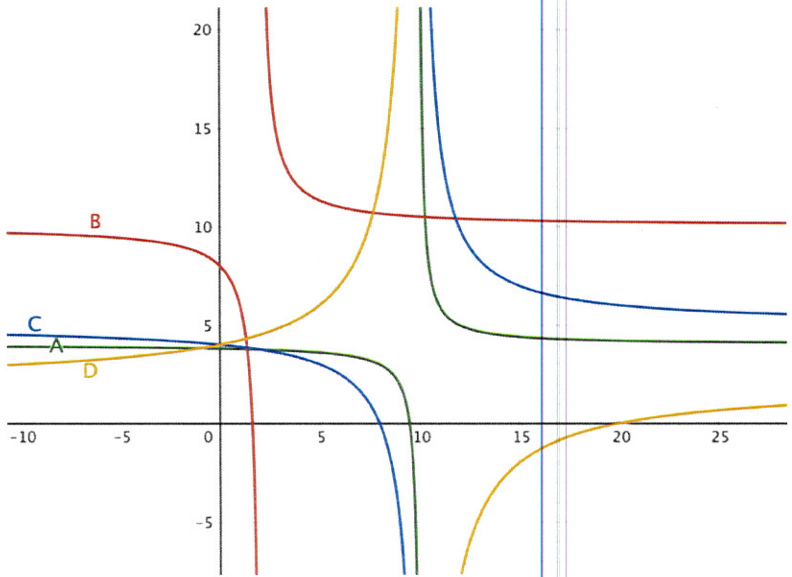


Figure 1: Graphs A-D

(A) $f(x)$ has the graph A (green)
(B) $f(x)$ has the graph B (red)
(C) $f(x)$ has the graph C (blue)
(D) $f(x)$ has the graph D (yellow)
(E) I choose not to answer this problem.

56

2019 høst Fagoppgave

Finn uttrykket for hyperbelfunksjonen

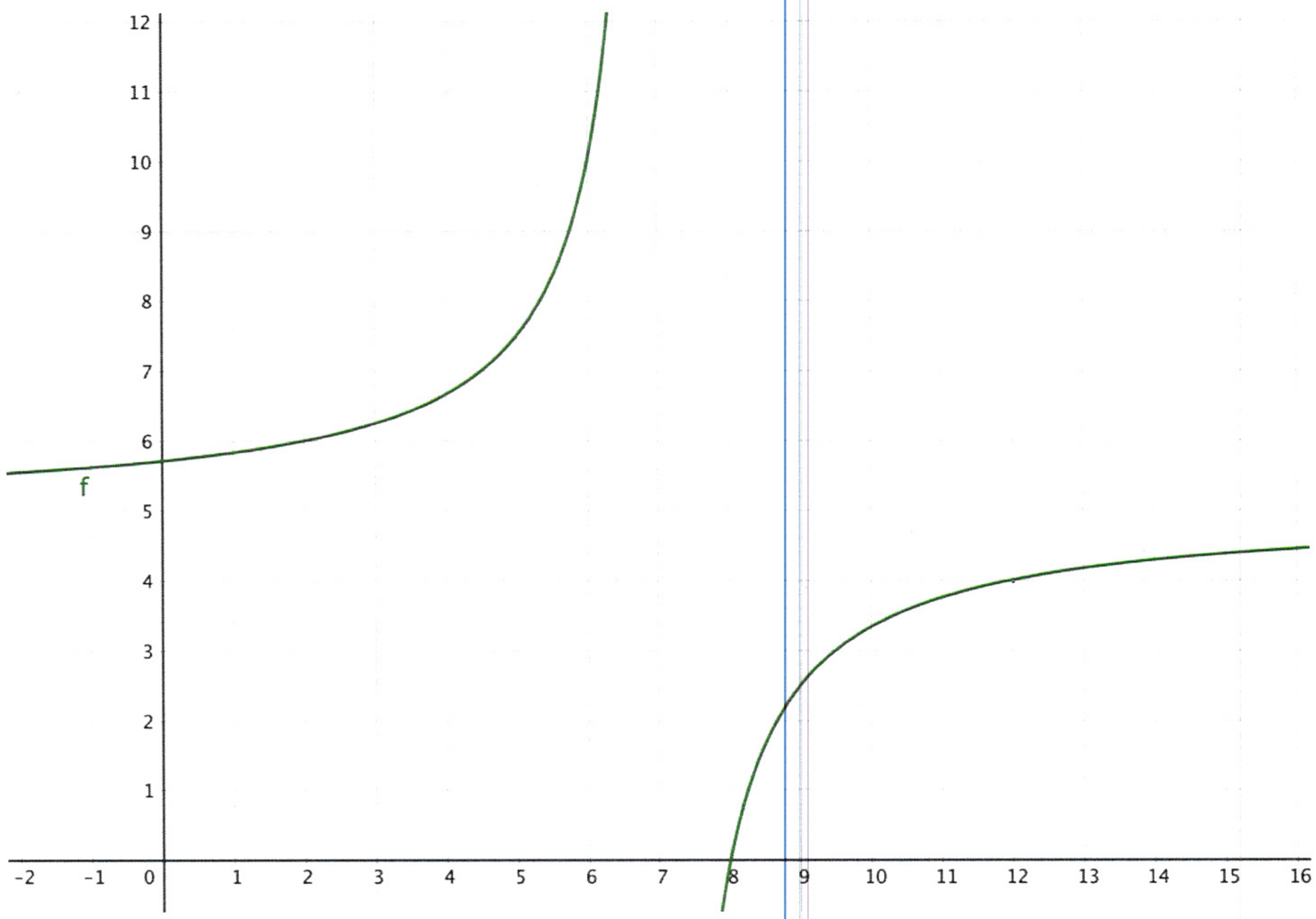



Figure 2: Hyperbola

5c