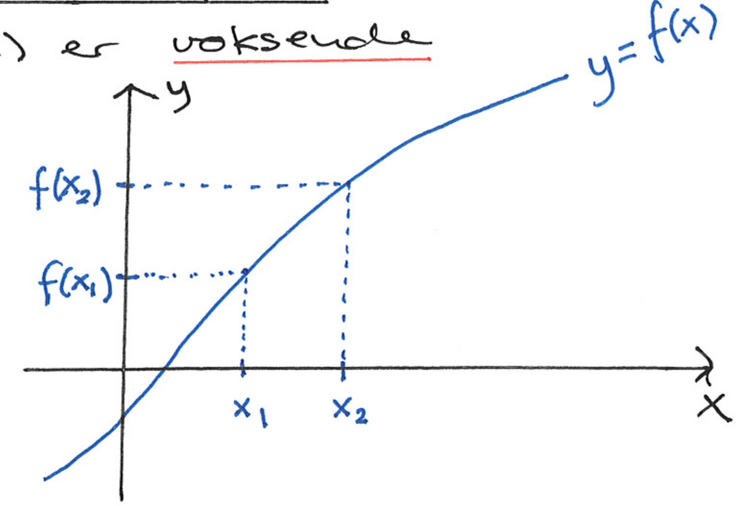
MET 1180, forelesning 12, 30. sept. 2025, Runar Ile

Plan 1. Voksende og avtagende funksjoner
2. Sirkler og ellipser
3. Polynomfunksjoner

1. Voksende og avtagende funksjoner



Definisjon En funksjon $f(x)$ er voksende hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \leq f(x_2)$

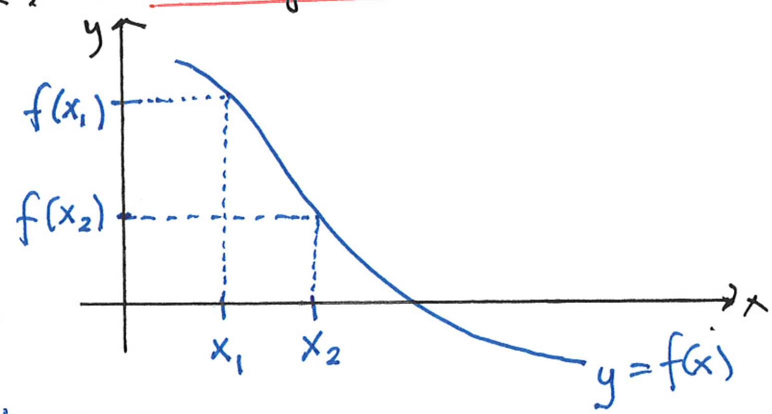
Eks $f(x) = 2x + 5$ er voksende fordi

Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot 2$

$2x_1 < 2x_2 \quad | + 5$

$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$

Altså er $f(x)$ en (strengt) voksende funksjon.



Definisjon En funksjon $f(x)$ er avtagende hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \geq f(x_2)$

Oppg Vis at $f(x) = -2x + 5$ er (strengt) avtagende.

Løsning Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot (-2)$

$-2x_1 > -2x_2 \quad | + 5$

$f(x_1) = -2x + 5 > -2x_2 + 5 = f(x_2)$

Altså er $f(x)$ en strengt avtagende funksjon.

Oppg Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$.
Avgjør om $f(x)$ er voksende, avtagende eller ingen av delene.

Løsning

Voksende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$

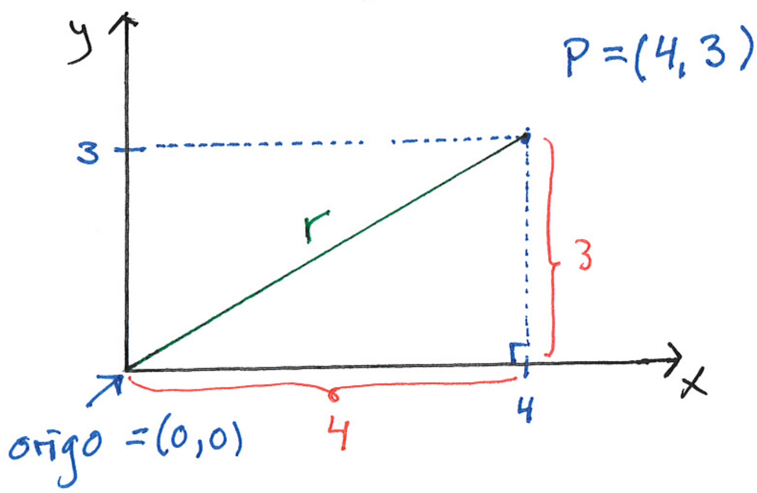
Avtagende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$

Konklusjon $f(x)$ er både voksende og avtagende.

Men $f(x)$ er ikke strengt voksende eller strengt avtagende.

---

2. Sirkler og ellipser



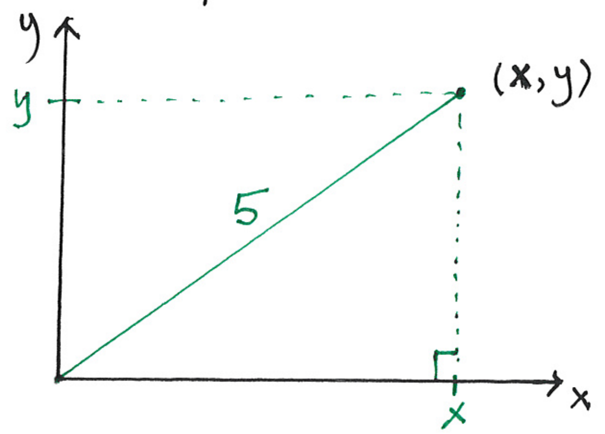
Pytagoras:

$r^2 = 4^2 + 3^2 \quad (r \geq 0)$

$r^2 = 16 + 9 = 25$

$r = \sqrt{25} = 5$

Anta punktet (x, y) ligger 5 fra origo



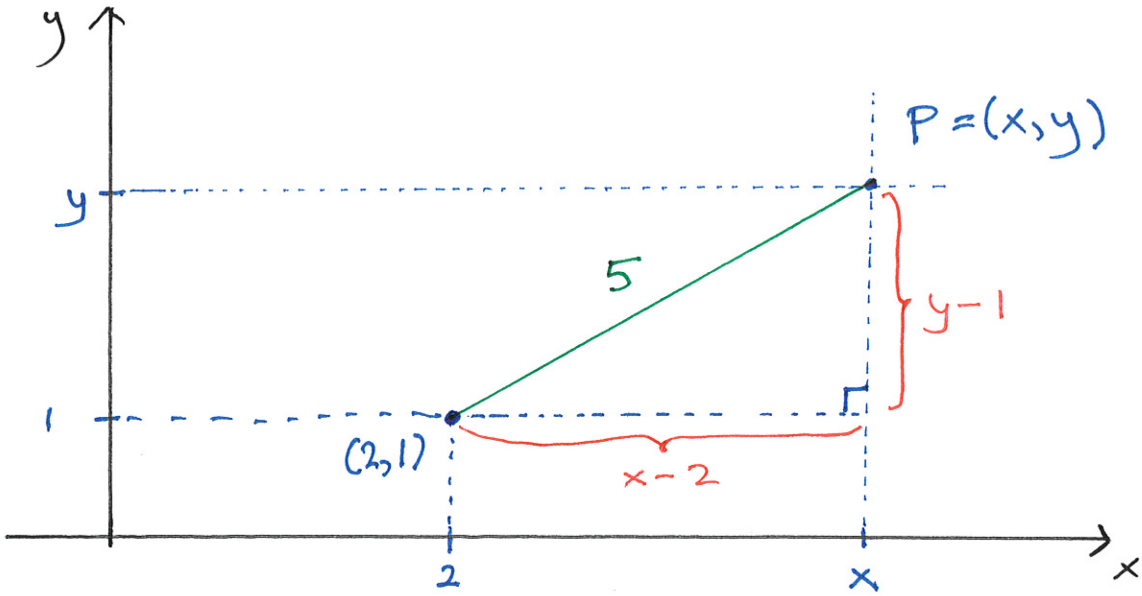
Pytagoras:

$25 = 5^2 = x^2 + y^2$

- én likning med to ukjente
- uendelig mange løsninger

Løsningene er alle punkter (x, y) på sirkelen med radius 5 og sentrum $(0, 0)$.

Eks Hva er likningen til punktene på en sirkel med radius 5 og sentrum (2, 1)?



Pytagoras: $5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

dvs $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$

Start: 9.01

Eks Bestem radius og sentrum til sirkelen gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = -9$$

Løsning $\underbrace{(x-1)^2}_{x^2 - 2x + 1} + \underbrace{(y+3)^2}_{y^2 + 6y + 9} = -9 + 1 + 9 = 1$

Sentrum: $\underline{\underline{(1, -3)}}$ Radius: $\sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$

Ellipser

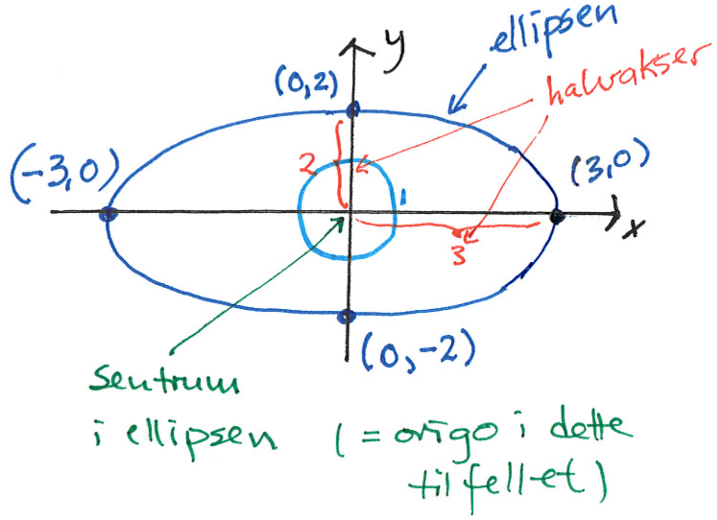
Eks $4x^2 + 9y^2 = 36$

x	3	−3	0	0
y	0	0	2	−2

Deler på 36 på begge sider:

$$\underbrace{\frac{4}{36}}_{=\frac{1}{9}} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{9}{36}}_{=\frac{1}{4}} \cdot y^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$



Dette minner om en sirkellikning, men

x-aksen er strukket med faktor 3

y-aksen er strukket med faktor 2

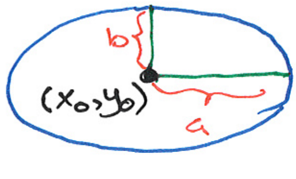
Generelt Enhver ellipse er løsningene til en likning på formen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

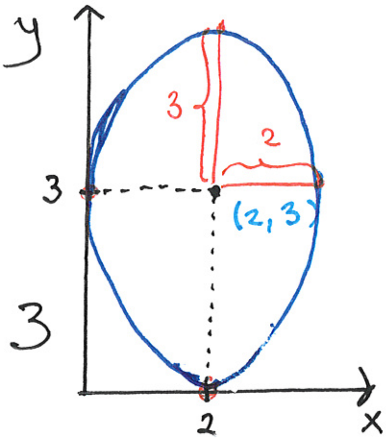
Her er (x_0, y_0) sentrum i ellipsen, og a og b er horisontal (a) og vertikal (b) halvakse.

I eks. over er $(x_0, y_0) = (0,0)$ og

$a = 3$, $b = 2$



Eks $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$



Sentrum : $(2, 3)$

Halvakser: $a = \sqrt{4} = 2$, $b = \sqrt{9} = 3$

---

3. Polynomfunksjoner

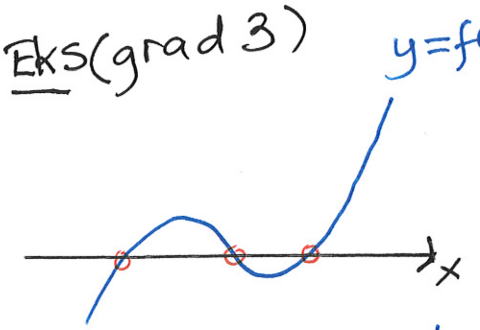
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$

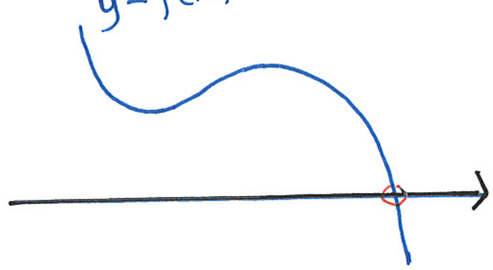
er en polynomfunksjon av grad n, skriver

grad$(f) = n$.

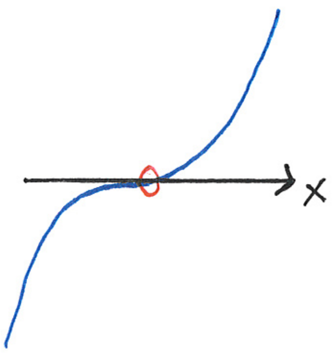
- $f(x)$ har maksimalt n røtter (nullpunkter)
- Hvis graden er et oddetall, har $f(x)$ minst én rot.
- Hvis $h(x)$ er en polynomfunksjon med m røtter, er grad$(h) \geq m$

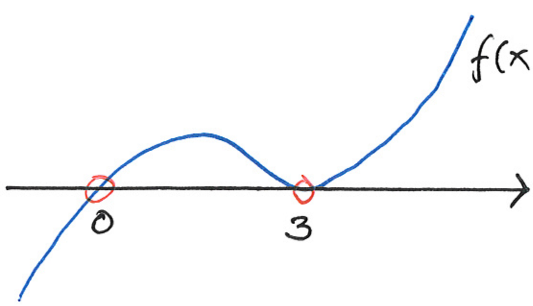
Eks (grad 3)





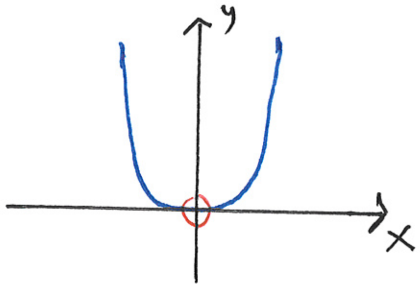
$f(x) = x^3$



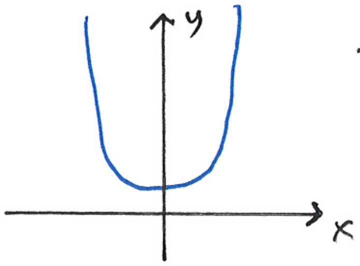


Eks (grad 4)

$f(x) = x^4$

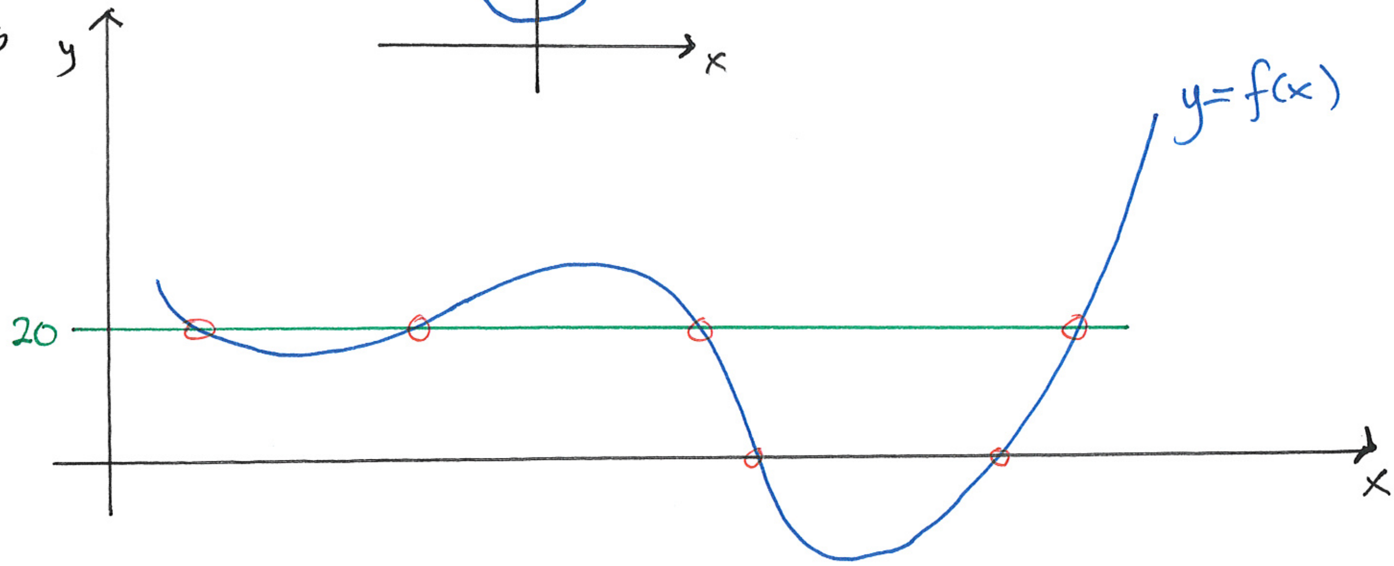


$f(x) = x^4 + 1$



– ingen røtter

Eks



Likningen $f(x) = 20$ har 4 løsninger,

dvs at $f(x) - 20 = 0$ —— " ——, dvs

at graden til $f(x) - 20$ er minst 4.

Da må også graden til $f(x)$ være minst 4.

(samme grad som $f(x) - 20$).