

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

Bestem når systemet har eksakt én løsning, og bruk Kramers regel til å finne løsningene i disse tilfellene:

$$\begin{array}{l} a) \quad \begin{array}{r} x + ay = 3 \\ ax + 4y = 1 \end{array} \qquad b) \quad \begin{array}{r} ax + y = 1 \\ -x + ay = 2 \end{array} \end{array}$$

Oppgave 2.

Avgjør hvor mange løsninger det lineære systemet har for ulike verdier av parameteren a , og finn løsningene når systemet er konsistent:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ ax + 4y + 3z = 25 \\ ax + y - z = 12 \end{array}$$

Oppgave 3.

Avgjør hvor mange løsninger det lineære systemet har for ulike verdier av parameteren a , og finn løsningene når systemet er konsistent:

$$\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -3 \end{array}$$

Oppgave 4.

Vi ser på vektorene er gitt ved

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tegn inn disse vektorene i et to-dimensjonal koordinatsystem. Regn så ut følgende vektorer, og tegn de inn i samme koordinatsystem:

$$a) \mathbf{u} + \mathbf{v} \qquad b) \mathbf{v} + \mathbf{w} \qquad c) \mathbf{v} - \mathbf{w} \qquad d) 2\mathbf{u} \qquad e) -\mathbf{v} \qquad f) 3\mathbf{u} + \mathbf{w}$$

Oppgave 5.

Løs vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ for vektorene nedenfor. Er \mathbf{b} en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6.

Skriv vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ på matrisform, og bruk dette til å løse likningen:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7.

Løs matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.

Bestem alle (a,b,c,d) slik at vektoren \mathbf{b} er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ gitt nedenfor. Bruk dette til å avgjøre om \mathbf{b} er en slik lineærkombinasjon når $(a,b,c,d) = (0,0,1,1)$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.

Du har 400.000 kr og skal investere i en portefølje av verdipapirer. Du kan velge en kombinasjon av verdipapirene A, B, C med pris $p_A = 60$ kr, $p_B = 75$ kr og $p_C = 320$ kr per aksje på investeringstidspunktet. Vi antar at på et gitt tidspunkt i framtiden, vil et av tre scenarier slå til. Prisene på verdipapirene i disse scenariene er gitt i tabellen nedenfor. Vi skriver x, y, z for antall aksjer du kjøper i hvert av de tre verdipapirene, og går for enkelthets skyld

	Pris A	Pris B	Pris C
Kjøpskurs	60	75	320
Scenario 1	80	80	350
Scenario 2	100	25	500
Scenario 3	40	100	55

ut i fra x, y, z kan være vilkårlige reelle tall. Vi tillater altså å kjøpe et negativt antall aksjer (short-salg), og antall aksjer trenger ikke være heltall.

- Vi går ut i fra at betingelsen $60x + 75y + 320z = 400.000$ er oppfylt. Hva betyr denne betingelsen?
- Vi skriver R_1, R_2 og R_3 for avkastningen til porteføljen (gevinsten) i de tre scenariene. Er det mulig å velge porteføljen slik at $(R_1, R_2, R_3) = (50.000, 25.000, -100.000)$? Hvilken portefølje må vi da velge?
- Er det mulig å velge en portefølje av verdipapirer slik at $R_1 > 0$ og $R_2 = R_3 = 0$? Hvilken portefølje må vi da velge? Tolk svaret.
- Beskriv alle talltripler (R_1, R_2, R_3) av mulige avkastninger i de tre scenariene. Finnes det noen porteføljer slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (garantert gevinst i alle scenarier)?

Oppgave 10.

Oppgaver fra læreboken: 6.4.6, 6.5.2 - 6.5.3

Oppgaver fra oppgaveboken: 9.19 - 9.22, 9.24, 9.26

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

$$a) (x,y) = \left(\frac{12-a}{4-a^2}, \frac{1-3a}{4-a^2} \right) \text{ for } a \neq \pm 2 \quad b) (x,y) = \left(\frac{a-2}{a^2+1}, \frac{2a+1}{a^2+1} \right) \text{ for alle } a$$

Oppgave 2.

Ingen løsninger for $a = 7$, eksakt én løsning $(x,y,z) = \left(\frac{17}{a-7}, \frac{-a-61}{a-7}, \frac{4a+23}{a-7} \right)$ for $a \neq 7$.

Oppgave 3.

Ingen løsninger for $a = 1$, uendelig mange løsninger $(x,y,z) = (z - 4/3, z - 5/3, z)$ med z fri for $a = -2$, og eksakt én løsning for $a \neq 1, -2$ gitt ved

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, \frac{-3}{a-1} \right)$$

Oppgave 4.

$$a) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5.

Generell løsning er $(x,y,z) = (-4z - 1, z + 1, z)$ med z fri. En konkret løsning får vi ved å sette (for eksempel) $z = 0$, som gir $(-1, 1, 0)$, og det betyr at $\mathbf{b} = -1 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Oppgave 6.

For $a = -8$ er det uendelig mange løsninger $(x,y,z) = (-4z - 1, z + 1, z)$ med z fri (som i forrige oppgave). For $a \neq -8$ er det eksakt én løsning $(x,y,z) = (-1, 1, 0)$.

Oppgave 7.

Eksakt én løsning $(x,y,z) = (-3/2, 4, -1/2)$.

Oppgave 8.

Det er en lineærkombinasjon hvis $-7a + 9b - 5c + 3d = 0$, og $(a,b,c,d) = (0, 0, 1, 1)$ svarer ikke til en lineærkombinasjon siden disse verdiene ikke oppfyller likningen.

Oppgave 9.

- Dette er budsjettbetingelse, altså at total kostnad for aksjen vi kjøper er 400.000 kr.
- Ja, om vi velger porteføljen $(x,y,z) = (1187^{1/2}, 2250, 500)$.
- Ja, om $R_1 = 80.000$. Vi må da velge porteføljen $(x,y,z) \approx (3333^{1/3}, 2666^{2/3}, 0)$. Dette betyr i så fall at vi kan investere uten å risikere tap, og med positiv forventet gevinst (en svært gunstig situasjon!).
- De avkastningstripler (R_1, R_2, R_3) som er mulige å oppnå oppfyller likningen $5R_1 - 2R_2 - 2R_3 = 400.000$. Vi kan velge porteføljen slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (altså garantert gevinst i alle scenarier, en enda gunstigere situasjon!). For eksempel kan vi realisere avkastningen $R_1 = R_2 = R_3 = 400.000$.

Oppgave 10.

Fullstendig løsning finnes i oppgaveboken [O].