Oppsummering: 24/05/2018

1. Om eksamen
2. Repetisjon hovedtema
3. Eksamen 05/2017

Oppgaveregning: 1 dag kl 13-16.
B2-060

1. Om eksamen

16 delspørsmål: $16 \times 6p = 96p$ max score
1 bonusspm: 6p

Karakterskala: Utg. pkt er som Eksamenssett II/III

Føring er viktig på eksamen.
Se Eksamenssettene.

Eks:

$\vdots$

$x^2 = 9$ $\quad$ $y^2 = 4$

$x = \pm 3$ $\quad$ $y = \pm 2$

$\vdots$

$2x + 3y = 12$

Min. forberedelse: Eksamen 05/2017
Eksamenssett I-III

2 Hovedtema

- A Funksjoner i én variabel Kap. 4 (3)
- B Integrasjon Kap 5
- C Matriseregning Kap 6
- D Funksjoner i flere variable Kap. 7

A Funksjoner i én variabel

- derivasjon
  - finne maks/min
  - finne når fn. voksende/avtagende
  - konveks/konkav (vendepkt)
  - skissere graf
- vanlige grafer
  - rette linjer $y = ax + b$
  - sirkler $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
  - ellipser $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
  - parabler $y = x^2$
  - hyperbel $y = 1/x$
  - grafen til e^x og $\ln x$
- grenseverdier (L'Hopital)
- asymptoter

Eksamen 05/2017, Opps. 3

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad x > 0$$

a) $$f' = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{1/x \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{\cancel{x} \cdot (1 - 2\ln x)}{x^{\cancel{4}3}}$$

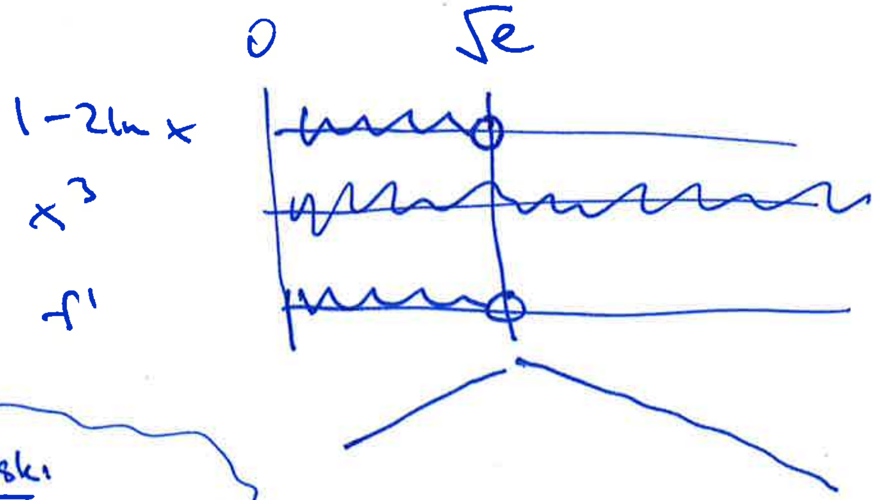
$$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$1 - 2\ln x = 0$

$\ln x = 1/2$

$x = e^{1/2}$

$= \sqrt{e}$



Husk:

$x = x^*$ maks/min-pt

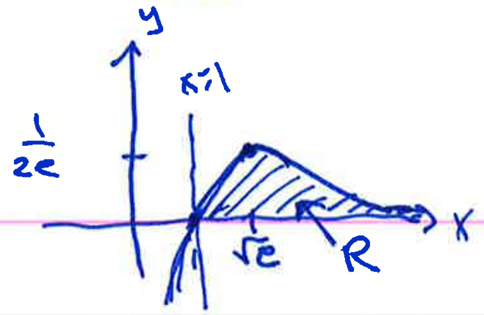
$f(x^*)$ maks/min-verdi

$x = \sqrt{e}$ globalt maks.pkt.

$$f_{maks} = f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1/2}{e} = \underline{\underline{\frac{1}{2e}}}$$ maks. verdi.

ingen globale min

b)



$$\text{Areal}(R) = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

(B) Integrasjon:

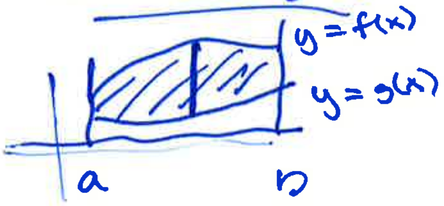
- Integrasjonsregler —
$$\begin{cases} \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \\ \int e^x\,dx = e^x + C \\ \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \end{cases}$$

- Bestemte integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

substitusjon
delvis integrasjon
delbrøksoppspalting

- Arealberegning



$$\boxed{A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx}$$

Eksamen 05/2017, Opps 2.

a) $$\int_0^1 \frac{3}{(2-x)^4}\,dx = \int_0^1 3\cdot(2-x)^{-4}\,dx$$

$$= \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{-3}}\cdot(2-x)^{-3}\cdot\frac{1}{\cancel{(-1)}} + C$$

$$= \left[\frac{1}{(2-x)^3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{8} = \underline{\underline{7/8}}$$

b) $$\int \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{2\cancel{u}}{u+1/u}\cdot\frac{du}{\cancel{u}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^x \\ du &= e^x\cdot dx \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{u\cdot 2}{u\cdot (u+1/u)}\,du = \int \frac{2u}{u^2+1}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= u^2+1 \\ dv &= 2u\cdot du \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{\cancel{2u}}{v}\cdot\frac{dv}{\cancel{2u}} = \int \frac{1}{v}\,dv$$

$$= \ln|v| + C = \ln(u^2+1) + C = \underline{\underline{\ln(e^{2x}+1)+C}}$$

c) $$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot \ln x \, dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -1/x & v &= \ln x \\ u' &= 1/x^2 & v' &= 1/x \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{x}\cdot \ln x - \int (-1/x)\cdot 1/x \, dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \underline{-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

3b) $$A = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^b = -\underbrace{\frac{\ln b}{b}}_{\text{"}\infty/\infty\text{"} \,\to\, 0} - \underbrace{\frac{1}{b}}_{\to 0} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{1}}$$

$\underline{\underline{\text{Areal} = 1}}$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1} = 0$$

fordi b vokser raskest

(c) Matriseregning

- Gauss for å løse lin.-system
- determinanter
- matrisemultiplikasjon

$A\underline{x}=\underline{b}$ er kvadratisk lin.-system.

$|A| \neq 0 \rightarrow$ én løsn. $\underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{b}$

$|A| = 0 \rightarrow$ ingen løsn. eller uendelig mange løsn.

- inverse matriser
- Kramer's regel

Eksamen 05/2017, Oppg 1

a) $\underline{a=1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)}_{\text{trappeform}}$$

$2z = -3 \rightarrow z = -3/2$

$2y + 2z = 2 \rightarrow 2y = 2 - 2z = 5 \rightarrow y = \underline{5/2}$

$2x + 2y = 4 \rightarrow 2x = 4 - 2y = -1 \rightarrow x = \underline{-1/2}$

Én løsn. $(x,y,z) = \underline{\underline{(-1/2,\ 5/2,\ -3/2)}}$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2\cdot 0 - 2\cdot(4-0) = -8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}^{T}}_{\text{Kofaktorene}} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \mid A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

c) Én løsn. $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{vmatrix} = (1+a) \cdot \left[(1+a)^2 - 4\right]$$

$$-2\left(2(1+a) - 2(1-a)\right)$$

$$+(1-a) \cdot \left(4 - (1+a)(1-a)\right)$$

$$= (1+a)\left((1+a)^2 - 4\right) - 8a + (3+a^2)(1-a)$$

$$= (1+a)(a^2+2a-3) - 8a + 3 - 3a + a^2 - a^3$$

$$= a^2 + 2a - 3 + \cancel{a^3} + 2a^2 - 3a - 8a + 3 - 3a + a^2 - \cancel{a^3}$$

$$= 4a^2 - 12a = \underline{4a(a-3)}$$

$|A| = 0$: $a = 0$, $a = 3$

$|A| \neq 0$: $\underline{a \neq 0,\ a \neq 3}$ gir én løsning.

d) Ingen løsninger: Mulige kandidater $\underline{a=0}$ $\underline{a=3}$

Bruker Gauss Gauss

(se løsning)

D Funksjoner i flere variabler

- partiell derivasjon → stasjonære pkt $\boxed{f'_x = f'_y = 0}$
  - klassifisere $H(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$
- ekstremverdisetningen

  f definert på lukket og begrenset mengde har maks/min
- nivåkurver
- maks/min med bibetingelser

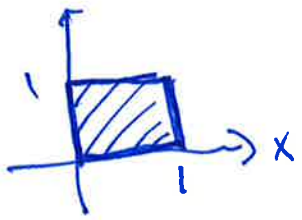
  * ved innsetting/omskriving

  max xy når $x+y=3$ ($y = 3-x$)

  $= \max x \cdot (3-x)$ uten bibetingelse

  * ved å se på punkt på randen:

  max xy når $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 1$



  * Lagrange.

Eksamen 05/2017, Oppg 4.

$$f = \frac{2x+3y-6}{xy} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}y} + \frac{3\cancel{y}}{x\cancel{y}} - \frac{6}{xy} = \frac{2}{y} + \frac{3}{x} - \frac{6}{xy}$$

a) $f'_x = -\frac{3}{x^2} - \frac{6}{y}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^2 y}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -1\cdot x^{-2}$
x^{-1}

$$= \frac{-3y}{x^2 y} + \frac{6}{x^2 y} = \underline{\frac{6-3y}{x^2 y}}$$

$$f'_y = -\frac{2}{y^2} - \frac{6}{x}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-2\cdot x}{y^2\cdot x} + \frac{6}{xy^2}$$

$$= \underline{\frac{6-2x}{xy^2}}$$

$f'_x = 0$: $6-3y=0$, $\underline{y=2}$

$f'_y = 0$: $6-2x=0$, $\underline{x=3}$

Stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{\underline{(3,2)}}$

Sadelpkt

b) $f''_{xx} = +\frac{6}{x^3} + \frac{6}{y}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right) = \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^3 y} \rightarrow A: \frac{6}{27} - \frac{12}{54} = 0$

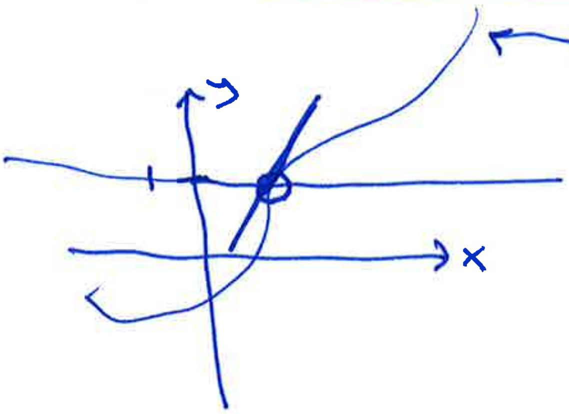
$f''_{xy} = \frac{6}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-6}{x^2y^2} \rightarrow B = -\frac{6}{36} = -1/6$

$H(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/6 & C \end{pmatrix}$ $\quad \det H(f) = 0 - \frac{1}{36} = -\frac{1}{36} < 0$

c) Kun ett stasjonært pkt, som er sadelpkt

Derfor: $\boxed{\text{Ingen maks} \quad \text{Ingen min}}$

d) f(x,y) = 5 skjærer y = 1 i et pkt (x,y):



$$f(x,y) = \frac{2x+3y-6}{xy} = 5$$

$$2x+3y-6 = 5xy$$

$$y = 1$$

Skjæringspkt: $(x,y) = (-1,1)$

$$2x + 3\cdot 1 - 6 = 5x\cdot 1$$

$$2x - 3 = 5x$$

$$-3x = 3$$

$$x = -1$$

Tangent:

$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

$$y - 1 = a\cdot(x+1)$$

$$y - 1 = \frac{3}{8}(x+1)$$

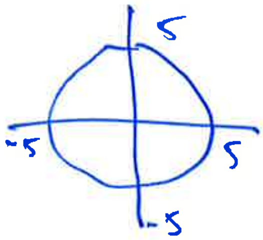
$$y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8} + 1$$

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{11}{8}$$

$$a = y'(-1,1) = -\frac{f'_x(-1,1)}{f'_y(-1,1)} = -\frac{3}{(-8)} = +3/8$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(-1,1) &= 3 \\ f'_y(-1,1) &= -8 \end{aligned}\right\} \text{fra a)}$$

5. a) $x^2+y^2=25$



Begrenset fordi

$-5 \le x \le 5$

$-5 \le y \le 5$

b) $L = x^4+2x^2y^2-4y^3-\lambda(x^2+y^2)$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 4x^3+4xy^2-\lambda\cdot 2x = 0 \\ L'_y &= 4x^2y-12y^2-\lambda\cdot 2y = 0 \\ & x^2+y^2 = 25 \end{aligned}}$$

$$x\cdot(4x^2+4y^2-2\lambda)=0$$

$$y\cdot(4x^2-12y-2\lambda)=0$$

1) $x=0,\ y=0$ $\qquad 0 \neq 25$ umulig

2) $x=0,\ -12y-2\lambda=0$ $\qquad y^2=25 \to y=\pm 5$

$\frac{2\lambda}{2} = \frac{-12y}{2}$ $\qquad \lambda=-6y$

Løsn: $(x,y;\lambda) = \underline{(0,5;-30)}$, $\underline{(0,-5;30)}$

$f=-500$ $\qquad f=500$

3) $4x^2+4y^2=2\lambda,\ y=0:$ $\qquad x^2=25 \to x=\pm 5$

$2\lambda = 4x^2 = 100$

$\lambda = 50$

Løsn: $(x,y;\lambda) = \underline{(5,0;50)}$, $\underline{(-5,0;50)}$

$f=625$ $\qquad f=625$

4) $4x^2 + 4y^2 = 2\lambda \rightarrow 4\cdot(x^2+y^2) = 4\cdot 25 = 100 = 2\lambda$

$4x^2 - 12y = 2\lambda \qquad \Rightarrow \underline{\lambda = 50}$

$x^2 + y^2 = 25 \searrow$

$4x^2 - 12y = 100$

$4(25-y^2) - 12y = 100$

$\cancel{100} - 4y^2 - 12y = \cancel{100}$

$-4y(y+3) = 0$

$y = 0$ eller $y = -3$

$x = \pm 5$; 2)

$x^2 = 25 - 9 = 16$

$x = \pm 4$

Løsn:

$(x, y; \lambda) = \underline{(4, -3; 50)}$,

$f = 256 + \cancel{196} + 108$
$= \cancel{...}\ 288\ 364 = \underline{652}$

$\underline{(-4, -3; 50)}$

$f = \underline{652}$

c) Løs Lagrangeproblemet.

$x^2+y^2 = 25$ er begrenset $\Rightarrow$ det fins maks/min

6 kandidatpkt: $f(\pm 4, -3) = \underline{652}$ er maks
(sammenligne fn. verdiene) $f(0, 5) = \underline{-500}$ er min

Degenert: $g = x^2 + y^2$ $\qquad g'_x = g'_y = 0$

$2x = 2y = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 0)$

Men $x^2+y^2 = 0 \neq 25$

ikke degenert