Løsning	Eksamensrelevante oppgaver i ELE 3719 Matematikk
	Vektorer, matriser og lineær algebra
Dato	Februar 2015

Oppgave 1.

(A) Vi leser av at

$$A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}}}, \quad B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 20 & 25 \end{pmatrix}}}, \quad C = \underline{\underline{-240}}$$

og har dermed at

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 10 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6x + 10y + 20 \\ 10x - 18y + 25 \end{pmatrix}}}$$

(B) Den karakterstiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 5 & -9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 2 = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = \underline{\underline{-6 \pm \sqrt{34}}} < 0$. Siden begge egenverdier er negative, er A $\underline{\underline{\text{negativ semidefinit}}}$ (og også negativ definit).

(C) Vi har at $\det(A) = 2 \neq 0$, så A er invertibel. Dermed har π et entydig stasjonært punkt, gitt ved

$$2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}A^{-1}B^T$$

Ettersom A er negativ (semi)definit, er π konkav og det stasjonære punktet $\mathbf{x}^* = -\frac{1}{2}A^{-1}B^T$ er et maksimum. Vi finner at

$$\mathbf{x}^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -9 \cdot 20 - 5 \cdot 25 \\ -5 \cdot 20 - 3 \cdot 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76.25 \\ 43.75 \end{pmatrix}$$

Dette gir maksimal verdi $\pi(x^*, y^*) = \pi(76.25, 43.75) = \underline{\underline{1069.375}}$.

Oppgave 2.

(A) Den karakteristiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 9 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 35) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = 3$ og $\lambda = 1 \pm \sqrt{36}$. Altså er $\underline{\underline{\lambda = 3}}$ en egenverdi, og de andre egenverdiene er $\underline{\underline{\lambda = 7}}$ og $\underline{\underline{\lambda = -5}}$.

(B) Egenvektorene for $\lambda = 3$ er gitt ved det lineære systemet

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at at andre likning er irrelevant og kan tas bort, og at z er fri parameter siden

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi løser de to gjenværende likningene for x og y og får

$$x = -2z/7, \quad y = -16z/7$$

Når vi setter $z = t$ for den frie variabelen z, får vi dermed at egenvektorene for $\lambda = 3$ kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t/7 \\ -16t/7 \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot t}}$$

(C) Anta $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ og at $A\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v},\ A\mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{w}$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vi skal vise at vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ er lineært uavhengige. Hvis de er lineært avhengige, så er $\mathbf{v} = c\mathbf{w}$ for en $c \neq 0$. Dette gir

$$A\mathbf{v} = A \cdot (c\mathbf{w}) = cA\mathbf{w}$$

og dermed

$$\lambda_1 \mathbf{v} = c\lambda_2 \mathbf{w} = \lambda_2 (c\mathbf{w}) = \lambda_2 \mathbf{v}$$

Vi kan skrive dette som $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og dette er ikke mulig siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dermed er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

Oppgave 3.

(A) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det(T) \neq 0$. Vi regner ut

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = 1 \cdot (2h - 1) - h \cdot (3h - h) + 1 \cdot (3 - 2h) = -2h^2 + 2$$

Dermed er vektorene lineært avhengige når $-2h^2 + 2 = 0$, det vil si når $h = \pm 1$, og vektorene er lineært uavhengige når $\underline{\underline{h \neq \pm 1}}$.

(B) Vi ser på matrisen med vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ som kolonner:

$$\begin{pmatrix} T\mathbf{v}_1 & T\mathbf{v}_2 & T\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot T = T^2$$

Når $h = 2$ har denne matrisen determinant

$$\det(T^2) = \det(T)^2 = (-2h^2 + 2)^2 = 36 \neq 0$$

Dermed er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ $\underline{\underline{\text{lineært uavhengige}}}$ når $h = 2$.

Oppgave 4.

(A) Den karakterstiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = 3,\ \lambda = 6$, og dette viser at $\underline{\underline{\lambda = 3 \text{ er en egenverdi}}}$. Alternativt kan man vise at $\lambda = 3$ er en egenverdi ved å sjekke at $\det(A - 3I) = 0$. Vi regner ut egenvektorene til A med egenverdi $\lambda = 3$ ved å løse likningssystemet

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at at andre likning er irrelevant og kan tas bort, og at tredje likning er første likning multiplisert med -1, og dermed også irrelevant. Derfor kan vi velge $y = s$ og $z = t$ som frie parametre, og når vi løser første likning for x får vi

$$2x = -y + z \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$$

Vi får dermed at egenvektorene for $\lambda = 3$ kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} s + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t}}$$

(B) Vi har at

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 29 & 7 & -13 \\ 7 & 11 & -5 \\ -13 & -5 & 17 \end{pmatrix}}}$$

Siden

$$\det(B) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = 54^2 = 2916 \neq 0$$

så følger det at B er $\underline{\underline{\text{invertibel}}}$. Videre har vi

$$B^{-1} = (A^T A)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T$$

Vi regner ut A^{-1} ved hjelp av den adjungerte matrisen:

$$A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$B^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -3 & 18 & 3 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{54}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Alternativt kunne vi beregnet $\det(B)$ og B^{-1} direkte, uten å gå veien om A.

(C) Vi har at de stasjonære punktene for f er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2B\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^{-1}\begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

siden B er invertibel.

(D) Når vi setter $y = A\mathbf{x}$, så har vi

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} \geq 0$$

siden $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq 0$. Dermed er den kvadratiske formen positiv semidefinit. Siden $\det(B) = 54^2 \neq 0$, så er ingen av egenverdiene til B null, og dermed er den kvadratiske formen til B også $\underline{\underline{\text{positiv definit}}}$.

Oppgave 5.

(A) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ er lineært avhengige hvis og bare hvis minst en av vektorene kan skrives som en lineær-kombinasjon av de tre andre. Vi forsøker å skrive $\mathbf{v}_4 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Siden koeffisientmatrisen har determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 1(7+1) + 3(0+2) = 14 \neq 0$$

så har likningssystemet en løsning, og dermed er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineært avhengige.

(B) Regningen i oppgave a) viser at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige: Siden determinanten i a) er ulik null, har likningen $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ kun løsningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Oppgave 6.

(A) Vi vet at $\lambda = 2$ er egenverdi for A hvis og bare hvis $\det(A-2I) = 0$. Vi regner ut $\det(A-2I)$:

$$\begin{vmatrix} 4-2 & -1 & 6 \\ 2 & 1-2 & 6 \\ 2 & -1 & 8-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

siden alle radene i matrisen er like. Dette viser at $\lambda = 2$ er en egenverdi for A.

(B) Vi regner ut det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) - 2(-1(8-\lambda)+6) + 2(-6-6(1-\lambda))$$

Vi vet at $\lambda - 2$ er en faktor i det karakteristiske polynomet, og vi forsøker derfor å forenkle og faktorisere polynomet:

$$(4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-7) - 2(\lambda-2) + 12(\lambda-2) = (\lambda-2)\left[(4-\lambda)(\lambda-7) - 2 + 12\right]$$

De andre egenverdiene er derfor gitt ved

$$(4-\lambda)(\lambda-7) - 2 + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^2 + 11\lambda - 18 = 0$$

Dette gir $\lambda = 2$ and $\lambda = 9$. Dermed er alle egenverdiene for A gitt ved

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 9}$$

og $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2^2 \cdot 9 = \mathbf{36}$.

Oppgave 7.

(A) Vi regner ut $\det(A)$ ved å utvikle determinanten langs tredje kolonne:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & t & 2 \\ 4 & 2t+4 & 0 \\ 1 & t+1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4(t+1) - 1(2t+4)) + 1 \cdot (3(2t+4) - 4(t)) = \mathbf{6t + 12}$$

Vi ser kolonnevektorene er lineært uavhengige for $\mathbf{t \neq -2}$ og lineært avhengige for $t = -2$, siden $|A| = 0$ hvis og bare hvis $t = -2$.

(B) Vi finner egenverdiene til A når $t = -2$ ved å løse den karakteristiske likningen

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2(-4+\lambda) + (1-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+8) = 0$$

Denne likningen kan skrives som $2\lambda - 8 + (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 8) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda = 0$, og dette gir $\lambda = 0$ eller $\lambda^2 - 4\lambda + 9 = 0$. Egenverdiene til A når $t = -2$ er gitt ved $\lambda = \mathbf{0}$, siden $\lambda^2 - 4\lambda + 9 = 0$ ikke har noen løsning.

Oppgave 8.

(A) Vektoren $\partial Q/\partial \mathbf{x}$ av første ordens partielle deriverte til Q er gitt ved $2A\mathbf{x}$, hvor A er den symmetriske matrisen til Q. Vi finner at A og den deriverte vektoren er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

De stasjonære punktene til Q er gitt ved $2A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og den eneste løsningen av denne likningen er $\mathbf{x} = 1/2(A^{-1}\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ siden vi har

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3)(7 \cdot 4 - (-1)^2) - 1 \cdot 1(7 \cdot 4 - (-1)^2) = 54 \neq 0$$

De stasjonære punktene for Q er derfor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(B) Vi avgjør om Q er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit ved å se på fortegnene til egenverdiene til A. Den karakteristiske likningen er gitt ved

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+4\lambda+2)(\lambda^2-11\lambda+27) = 0$$

og egenverdiene er derfor gitt ved $\lambda^2+4\lambda+2=0$, som gir $\lambda = -2\pm\sqrt{2} < 0$, og $\lambda^2-11\lambda+27=0$, som gir $\lambda = 11/2 \pm \sqrt{13}/2 > 0$. Siden A har to positive og to negative egenverdier, så er Q **indefinit**.

Oppgave 9.

(A) Vi utvikler determinanten langs første kolonne og dette gir

$$\det(A) = 1(-1+3) - s(-2+3s) + 1(-2+s) = -3s^2+3s$$

Likningen $AX = I$ har løsninger hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$, og vi ser dette ved følgende argument: Hvis $\det(A) \neq 0$, så er A invertibel og $X = A^{-1}I = A^{-1}$ er en løsning. Hvis $\det(A) = 0$, så kan ikke likningen ha løsning, for i så fall er $\det(AX) = \det(I) = 1$, men vi har $\det(AX) = \det(A)\det(X) = 0$. Til slutt ser vi at $\det(A) = 0$ for $s = 0$ og $s = 1$, så matriselikningen har løsning for $s \neq 0, 1$.

(B) Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dermed blir

$$X^TX = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

med $\det(X^TX) = 14 \neq 0$, og beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (X^TX)^{-1}(X^T\mathbf{y}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 73 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 73/14 - 27/14\, x_1 \cong 5.21 - 1.93\, x_1$.

Oppgave 10.

(A) Den symmetriske matrisen A blir

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & a-2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ a-2 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2-(a-2)^2)) = 0$$

som gir $\lambda = 1$ og $\lambda = a \pm \sqrt{a^2-(a^2-(a-2)^2)} = a \pm |a-2| = a \pm (a-2) = 2, 2a-2$. Når $a = 3$ blir egenverdiene $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 4$.

(B) Den kvadratiske formen er positiv definit om alle egenverdier er positive, og dette vil skje om $a > 1$. Når $a < 1$ så har A både postive og negative egenverdier, og A er indefinit. Om $a = 1$, så er egenverdiene $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 0$, og A er da hverken positiv definit, negativ definit eller indefinit (men positiv semidefinit).

Oppgave 11.

(A) Vi utvikler determinanten langs første kolonne og dette gir

$$\det(A) = 1(9a - 3a^2) - 1(9-3) + 1(a^2 - a) = -2a^2 + 8a - 6$$

Vi vet at A er inverterbar når $\det(A) \neq 0$. Siden $\det(A) = 0$ for $a = 1$ og $a = 3$, er A inverterbar for $a \neq 1, 3$.

(B) Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 4 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 3 - x_1 + x_2$.

Oppgave 12.

(A) Vi velger matrisen A symmetrisk, og får dermed at $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad c = 4$$

De stasjonære punktene er gitt ved $\partial f / \partial \mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0}$, og dette gir

$$2A\mathbf{x} = -B^T \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Siden $\det(A) = -1(3-1) = -2 \neq 0$, så er A inverterbar og det er et eneste stasjonært punkt. Vi finner dette ved å løse det lineære likningssystemet, for eksempel ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og finner

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

(B) Vi regner ut egenverdiene til A for å klassifisere den kvadratiske formen, og får

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 2) = 0$$

Dette gir egenverdier $\lambda = -1$ og $\lambda = (-4 \pm \sqrt{16-8})/2 = -2 \pm \sqrt{2}$. Siden alle egenverdier er negative, er A negativ definit, og det stasjonære punktet er dermed et (globalt) maksimumspunkt.

Oppgave 13.

(A) Vi utvikler determinanten langs første kolonne og dette gir

$$\det(A) = -1(9+6s) + 1(s^2 - 2s) = s^2 - 8s - 9$$

Vi vet at A er inverterbar når $\det(A) \neq 0$. Siden $\det(A) = 0$ for $s = 9$ og $s = -1$, er A inverterbar for $s \neq 9, -1$.

(B) Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 4 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 2 + x_1 + 4x_2$.

Oppgave 14.

(A) Vi velger matrisen A symmetrisk, og får dermed at $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad c = 8$$

De stasjonære punktene er gitt ved $\partial f / \partial \mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0}$, og dette gir

$$2A\mathbf{x} = -B^T \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi finner disse ved å løse det lineære likningssystemet, for eksempel ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og får

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

(B) Vi regner ut egenverdiene til A for å klassifisere den kvadratiske formen, og får

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3) - 1(-2-\lambda+1) + 1(-1+2+\lambda) = 0$$

Dette gir egenverdier

$$(-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3) + 2(\lambda+1) = 0$$

Vi ser at $\lambda = -1$ er en egenverdi siden $(\lambda + 1)$ er en felles faktor.

(C) Vi regner ut de andre egenverdiene ved $(-2-\lambda)(\lambda+3) + 2 = 0$, som gir $-\lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$, og dermed

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \frac{5 \pm 3}{-2}$$

Alle egenverdier er dermed negative, og A er negativ definit. Det betyr at det stasjonære punktet er et (globalt) maksimumspunkt.