Løsning	Prøve-eksamen i ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	Mai 2015

Alle deloppgaver har samme vekt og gir maksimalt 6p hver. Svarene på de 15 ordinære deloppgavene gir maksimalt 90p (100%). Oppgaver merket Bonus kan sløyfes, men gir opp til 6p ekstra om de besvares korrekt.

Veiledende karaktergrenser:
A: 82p (92%) B: 69p (77%) C: 52p (58%) D: 41p (46%) E: 36p (40%)

Oppgave 1.

(a) Vi utvikler det karakteristiske polynomet $|A - \lambda I|$ langs første kolonne og får:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-16) + 2(-2)(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 18)$$

Ved å sette $\lambda = 0$, får vi $\det(A) = -18$.

(b) Egenverdiene til A er gitt ved den karakteristiske likningen

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = 0$$

som gir $\lambda = 1$ eller $\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$, som gir $\lambda = 6$ eller $\lambda = -3$. Siden vi har både positive og negative egenverdier, så er A indefinitt.

(c) Vi finner egenverdiene for $\lambda = 1$ ved å løse det lineære systemet $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir y fri, $z = 0$ og $x = -2y$. Egenvektorene for $\lambda = 1$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y\,\mathbf{v}_1 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene for $\lambda = 6$ ved å løse det lineære systemet $(A - 6I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = 4z/5$ og $x = 2z/5$. Egenvektorene for $\lambda = 6$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2z/5 \\ 4z/5 \\ z \end{pmatrix} = (z/5) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (z/5)\,\mathbf{v}_2 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene for $\lambda = -3$ ved å løse det lineære systemet $(A + 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = -z$ og $x = -z/2$. Egenvektorene for $\lambda = -3$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -z/2 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = (z/2) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (z/2)\,\mathbf{v}_3 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dermed er $P^{-1}AP$ er diagonal om vi velger P lik matrisen med vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ som kolonner:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Funksjonen f kan skrives på matriseform som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$, hvor A er matrisen ovenfor, $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -12 \end{pmatrix}$ og $C = (8)$. De stasjonære punktene til f er dermed gitt ved

$$\partial f/\partial \mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^T \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi løser det lineære systemet ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og får $(x, y, z) = (2, 1, -1)$. Dette er et sadelpunkt siden A er indefinitt.

(e) Matrisen P i (c) er ortogonal hvis og bare hvis $P^T P = I$, det vil si at vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tilfredsstiller kravene at $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ når $i \neq j$ (vektorene står normalt på hverandre) og $||\mathbf{v}_i|| = 1$. Det første kravet er oppfyllt for vektorene vi valgte i (c). Det andre kravet er oppfyllt om vi multipliserer hver vektor $\mathbf{v}$ med skalaren $1/||\mathbf{v}||$. Dermed blir P ortogonal om vi velger kolonnevektorene i P slik:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(f) Om vi velger $\mathbf{u} = P^T\mathbf{x}$, eller $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$, så får vi nye variabler gitt ved

$$u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y), \quad v = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2x + 4y + 5z), \quad w = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z)$$

siden $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Dette gir at f kan skrives som

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T(PDP^T)\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C \\ &= \mathbf{u}^T D\mathbf{u} + BP^T\mathbf{u} + C \\ &= u^2 + 6v^2 - 3w^2 + 6\left(\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{4}{3\sqrt{5}}v - \frac{2}{3}w\right) - 12\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}v + \frac{2}{3}w\right) + 8 \\ &= u^2 + 6v^2 - 3w^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}u - \frac{12}{\sqrt{5}}v - 12w + 8 \end{aligned}$$

Oppgave 2.

(a) Vi regner først ut den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^2 k(x^3 + 3xy + y^3)\,dy = k\left[x^3y + 3xy^2/2 + y^4/4\right]_0^2 = k(2x^3 + 6x + 4)$$

For å bestemme k, bruker vi at $\int f_X(x)\,dx = 1$. Dette gir likningen

$$\int_0^2 k(2x^3 + 6x + 4)\,dx = k\left[2x^4/4 + 6x^2/2 + 4x\right]_0^2 = k(8 + 12 + 8) = 28k = 1$$

og dermed er $k = 1/28$ og $f_X(x) = (2x^3 + 6x + 4)/28$ når $0 \le x \le 2$ (og null ellers).

(b) Vi regner ut $E(X)$ og $E(X^2)$ ved å løse integralene:

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot k(2x^3 + 6x + 4)\,dx = k\left[2x^5/5 + 6x^3/3 + 4x^2/2\right]_0^2 = k(64/5 + 16 + 8) = \frac{46}{35}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot k(2x^3 + 6x + 4)\,dx = k\left[2x^6/6 + 6x^4/4 + 4x^3/3\right]_0^2 = k(64/3 + 24 + 32/3) = 2$$

Dette gir $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - (46/35)^2 = 334/1225$.

(c) Vi har at $\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, og $E(Y) = E(X)$ siden $f(x,y)$ er symmetrisk i x og y. Vi regner ut $E(XY)$ ved å løse integralet

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^2 xy \cdot k(x^3 + 3xy + y^3)\, dy\, dx = k \int_0^2 \left[x^4y^2/2 + 3x^2y^3/3 + xy^5/5\right]_0^2 dx \\ &= k \int_0^2 2x^4 + 8x^2 + 32x/5\, dx = k\left[2x^5/5 + 8x^3/3 + 32x^2/10\right]_0^2 \\ &= k(64/5 + 64/3 + 64/5) = \frac{176}{105} \end{aligned}$$

Dermed er $\operatorname{Cov}(X,Y) = 176/105 - (46/35)^2 = -108/3675$. Siden $\operatorname{Cov}(X,Y) \neq 0$, så er X og Y ikke uavhengige.

(d) Generelt har vi at $E(Z) = E(2U + 3V) = 2E(U) + 3E(V) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$, og at $\operatorname{Var}(Z)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Z) &= \operatorname{Var}(2U + 3V) = \operatorname{Cov}(2U + 3V, 2U + 3V) \\ &= 2^2 \operatorname{Var}(U) + 2 \cdot 3 \operatorname{Cov}(U,V) + 3 \cdot 2 \operatorname{Cov}(V,U) + 3^2 \operatorname{Var}(V) \\ &= 4 \operatorname{Var}(U) + 9 \operatorname{Var}(V) + 12 \operatorname{Cov}(U,V) \end{aligned}$$

Når U og V er uavhengige, er $\operatorname{Cov}(U,V) = 0$, og da er $\operatorname{Var}(Z) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 25$.

(e) Fra uttrykket ovenfor, er $\operatorname{Var}(Z) = 25 + 12(c - 1 \cdot 3) = 12c - 11$ siden $\operatorname{Cov}(U,V) = E(UV) - E(U)E(V) = c - 1 \cdot 3$. Hvis U og V er uavhengige, så må $\operatorname{Cov}(U,V) = 0$, og da må $c = 3$.

Oppgave 3.

(a) Likningen $y'' - 8y' - 7y = 21$ er en lineær annenordens differensiallikning, og den har løsning $y = y_h + y_p$. Den karakteristiske likningen $r^2 - 8r - 7 = 0$ har løsning $r = 4 \pm \sqrt{23}$, så $y_h = C_1 e^{(4+\sqrt{23})t} + C_2 e^{(4-\sqrt{23})t}$. Vi prøver å finne en partikulær løsning $y_p = A$, og innsetting gir $-7A = 21$, eller $A = -3$. Dermed er den generelle løsningen

$$y = y_h + y_p = C_1\, e^{(4+\sqrt{23})t} + C_2\, e^{(4-\sqrt{23})t} - 3$$

(b) Likningen $t^2y' - y = 1$ kan skrives som $y' - (1/t^2)y = 1/t^2$, og er derfor en førsteordens lineær differensiallikning. Integrerende faktor er $e^{1/t}$ siden $\int -1/t^2\, dt = 1/t$, og vi får dermed

$$(e^{1/t}y)' = \frac{1}{t^2}\, e^{1/t} \quad \Rightarrow \quad e^{1/t}y = \int \frac{1}{t^2}\, e^{1/t}\, dt = -e^{1/t} + C$$

Vi har løst integralet ved å bruke substitusjonen $u = 1/t$ med $du = -1/t^2\, dt$. Den generelle løsningen blir derfor

$$y = -1 + C\, e^{-1/t}$$

(c) Likningen $e^{-y} + ty' = 1$ er separabel (men ikke lineær), og kan skrives som

$$ty' = 1 - e^{-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - e^{-y}} y' = \frac{1}{t}$$

Vi utvider den første brøken med e^y og bruker at $y'\, dt = dy$. Integrasjon på begge sider med hensyn til t gir da

$$\int \frac{e^y}{e^y - 1}\, dy = \int \frac{1}{t}\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|e^y - 1| = \ln|t| + C$$

Vi har brukt substitusjonen $u = e^y - 1$ med $du = e^y dy$ for å løse det første integralet. Vi løser for y for å få likningen på eksplisitt form:

$$|e^y - 1| = e^{\ln|t| + C} = e^C\, |t| \quad \Rightarrow \quad e^y - 1 = Kt$$

med $K = \pm e^C$. Dette gir $e^y = Kt + 1$, og $y = \ln(Kt + 1)$.

Oppgave 4.

(a) Siden $F = \ln(y - y')\, e^{-rt}$, har vi at de partielle deriverte er

$$F'_y = \frac{1}{y - y'}\, e^{-rt}, \quad F'_{y'} = \frac{-1}{y - y'}\, e^{-rt}$$

Dermed er Euler-likningen for dette problemet gitt ved

$$\frac{1}{y - y'}\, e^{-rt} - \left(\frac{y' - y''}{(y - y')^2}\, e^{-rt} + \frac{-1}{y - y'}\, (-r)e^{-rt} \right) = 0$$

Multiplikasjon med $(y - y')^2 e^{rt}$ gir dermed likningen

$$(y - y') - (y' - y'') - r(y - y') = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + (r - 2)y' + (1 - r)y = 0$$

Dette er en homogen annenordens lineær differensiallikning, med karakteristisk likning $\lambda^2 + (r-2)\lambda + (1-r) = 0$ (vi bruker λ istedet for r som variabel siden renten er kalt r). Løsningene er

$$\lambda = \frac{-(r - 2) \pm \sqrt{(r - 2)^2 - 4(1 - r)}}{2} = \frac{2 - r \pm r}{2} = 1, 1 - r$$

Den generelle løsningen av Euler-likningen er derfor

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{(1-r)t}$$

Setter vi inn betingelsene $y(0) = 1$ og $y(4) = e^{4-4r}$, gir dette $C_1 + C_2 = 1$ og $C_1 e^4 + C_2 e^{4-4r} = e^{4-4r}$, eller $C_1 = 0$ og $C_2 = 1$. Altså er

$$y^*(t) = e^{(1-r)t}$$

(b) Vi vet at om F er konkav i (y, y') så er y^* løsning av max-problemet. Vi regner derfor ut den Hessiske matrisen til F:

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{y,y} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \frac{e^{-rt}}{(y - y')^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har satt faktoren som er felles utenfor. Vi ser at determinanten blir

$$\left(\frac{e^{-rt}}{(y - y')^2} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

og at de to uttrykkene på diagonalen er negative. Derfor er F konkav i (y, y') og $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet.