Løsning	Eksamen i ELE 3719 Matematikk Valgfag
Dato	10. juni 2015 kl 0900-1400

Alle deloppgaver har samme vekt og gir maksimalt 6p hver. Svarene på de 15 ordinære deloppgavene gir maksimalt 90p (100%). Bonusoppgaver kan sløyfes, men gir opp til 6p ekstra per deloppgave om de besvares korrekt.

Oppgave 1.

(a) Vi utvikler det karakteristiske polynomet $|A - \lambda I|$ langs første kolonne og får:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)-4) + 2(-2)(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

Ved å sette $\lambda = 0$, får vi $\det(A) = -15$.

(b) Egenverdiene til A er gitt ved den karakteristiske likningen

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$

som gir $\lambda = 3$ eller $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, som gir $\lambda = 5$ eller $\lambda = -1$. Siden vi har både positive og negative egenverdier, så er A indefinitt.

(c) Vi finner egenverdiene for $\lambda = 3$ ved å løse det lineære systemet $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $x = 0$ og $y = z$. Egenvektorene for $\lambda = 1$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y\,\mathbf{v}_1 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene for $\lambda = 5$ ved å løse det lineære systemet $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = -z$ og $x = z$. Egenvektorene for $\lambda = 5$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = z\,\mathbf{v}_2 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene for $\lambda = -1$ ved å løse det lineære systemet $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi bruker Gausseliminasjon på koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir z fri, $y = -z$ og $x = -2z$. Egenvektorene for $\lambda = -1$ er derfor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = z\,\mathbf{v}_3 \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er $P^{-1}AP$ er diagonal om vi velger P lik matrisen med vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ som kolonner:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Funksjonen f kan skrives på matriseform som $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$, hvor A er matrisen ovenfor, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -10 \end{pmatrix}$ og $C = (5)$. De stasjonære punktene til f er dermed gitt ved

$$\partial f/\partial \mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^T \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi løser det lineære systemet ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og får $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Dette er et sadelpunkt siden A er indefinitt.

(e) Vi regner ut indreproduktene, og bruker symmetri (det vil si at $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i$) for å forenkle regningen:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 2, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 3, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 6$$

Dette gir at

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vi kan også regne ut $P^T P$, og finner at $P^T P = B$.

(f) Om vi kaller de to egenverdiene for λ_1 (for $\mathbf{v}$) og λ_2 (for $\mathbf{w}$), så har vi at

$$S\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}, \quad S\mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{w}$$

Multipliserer vi første likning med $\mathbf{w}^T$ og siste likning med $\mathbf{v}^T$ fra venstre, får vi at

$$\mathbf{w}^T S\mathbf{v} = \mathbf{w}^T \lambda_1 \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{w}^T \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^T S\mathbf{w} = \mathbf{v}^T \lambda_2 \mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{v}^T \mathbf{w}$$

Siden $S^T = S$ (S er symmetrisk), gir transponering av første likning at

$$\mathbf{v}^T S\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}^T \mathbf{w}$$

Dermed får vi at

$$\lambda_1 \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{v}^T \mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$$

Ettersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$, gir dette $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$. Det vil si at indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Oppgave 2.

(a) Vi regner først ut den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2 + 8xy) + y^4 \, dy = \left[k(x^2 y + 8xy^2/2) + y^5/5\right]_0^1 = k(x^2 + 4x) + 1/5$$

For å bestemme k, bruker vi at $\int f_X(x)\, dx = 1$. Dette gir likningen

$$\int_0^1 k(x^2 + 4x) + 1/5 \, dx = k\left[x^3/3 + 4x^2/2) + x/5\right]_0^1 = k(1/3 + 2) + 1/5 = 7k/3 + 1/5 = 1$$

Multiplikasjon med 15 gir $35k + 3 = 15$, og $k = 12/35$. Dermed er

$$f_X(x) = 12/35(x^2 + 4x) + 1/5 = 12/35(x^2 + 4x + 7/12)$$

når $0 \leq x \leq 1$ (og null ellers).

(b) Vi regner ut $E(X)$ og $E(X^2)$ ved å løse integralene:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x \cdot k(x^2+4x+7/12)\,dx = k\left[x^4/4+4x^3/3+(7/12)x^2/2\right]_0^1 \\
&= k(1/4+4/3+7/24) = \frac{9}{14} \approx 0.643 \\
E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot k(x^2+4x+7/12)\,dx = k\left[x^5/5+4x^4/4+(7/12)x^3/3\right]_0^1 \\
&= k(1/5+1+7/36) = \frac{251}{525} \approx 0.478
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 251/525 - (9/14)^2 = 953/14700 \approx 0.065$.

(c) Vi regner ut $E(XY)$ ved å løse integralet

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot k(x^2+8xy+35y^4/12)\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 \left[x^3y^2/2+8x^2y^3/3+(35/12)xy^6/6\right]_0^1 dx \\
&= k\left[x^4/8+(8/3)x^3/3+(35/72)x^2/2\right]_0^1 = k(1/8+8/9+35/144) = \frac{181}{420} \approx 0.431
\end{aligned}$$

(d) Vi regner ut $E(Y)$ ved å løse integralet:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 \int_0^1 y \cdot k(x^2+8xy+35y^4/12)\,dy\,dx = k\int_0^1 \left[x^2y^2/2+8xy^3/3+(35/12)y^6/6\right]_0^1 dx \\
&= k\left[x^3/6+8x^2/6+(35/72)x\right]_0^1 = k(1/6+4/3+35/72) = \frac{143}{210} \approx 0.681
\end{aligned}$$

Dermed er $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \approx 0.431 - 0.643 \cdot 0.681 \approx -0.007$. Siden $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, så er X og Y ikke uavhengige.

(e) Vi har at $\mathrm{Var}(U+V) = \mathrm{Var}(U) + 2\,\mathrm{Cov}(U,V) + \mathrm{Var}(V) = 1/4 + 2\alpha + 1/9 = 13/36 + 2\alpha$. Dersom U og V er uavhengige, så er

$$f(u,v) = f_U(u) \cdot f_V(v) = 2e^{-2u} \cdot 3e^{-3v} = 6e^{-2u-3v}$$

når $u, v \geq 0$ (og null ellers).

Oppgave 3.

(a) Likningen $y'' - 5y' - 14y = 10$ er en lineær annenordens differensiallikning, og den har løsning $y = y_h + y_p$. Den karakteristiske likningen $r^2 - 5r - 14 = 0$ har løsning $r = 5/2 \pm 9/2 = 7, -2$, så $y_h = C_1e^{7t} + C_2e^{-2t}$. Vi prøver å finne en partikulær løsning $y_p = A$, og innsetting gir $-14A = 10$, eller $A = -10/14 = -5/7$. Dermed er den generelle løsningen

$$y = y_h + y_p = C_1e^{7t} + C_2e^{-2t} - \frac{5}{7}$$

(b) Likningen $e^ty' - e^ty = 1$ kan skrives som $y' - y = 1/e^t = e^{-t}$, og er derfor en førsteordens lineær differensiallikning. Integrerende faktor er e^{-t} siden $\int -1\,dt = -t + C$, og vi får dermed

$$(e^{-t}y)' = e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad e^{-t}y = \int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

Den generelle løsningen blir derfor

$$y = e^t\left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + C\right) = -\frac{1}{2}e^{-t} + Ce^t$$

(c) Likningen $y^2 - 2ty\,y' = 1$ er separabel (men ikke lineær), og kan skrives som

$$-2ty\,y' = 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2y}{1-y^2}\,y' = \frac{1}{t}$$

Integrasjon på begge sider med hensyn til t gir da

$$\int \frac{-2y}{1-y^2}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln|1-y^2| = \ln|t| + C$$

Vi har brukt substitusjonen $u = 1 - y^2$ med $du = -2y\,dy$ for å løse det første integralet. Vi løser for y for å få likningen på eksplisitt form:

$$|1-y^2| = e^{\ln|t|+C} = e^C\,|t| \quad \Rightarrow \quad 1-y^2 = Kt$$

med $K = \pm e^C$. Dette gir $y^2 = 1 - Kt$, og $y = \pm\sqrt{1-Kt}$.

Oppgave 4.

(a) Vi skriver $F = \ln(ay' - by) = \ln(u)$ med $u = ay' - by$ for å forkorte regningene nedenfor. De partielle deriverte er

$$F'_y = \frac{-b}{u}, \quad F'_{y'} = \frac{a}{u}$$

Dermed er Euler-likningen for dette problemet gitt ved

$$\frac{-b}{u} - \left(-\frac{au'}{u^2}\right) = 0$$

Multiplikasjon med u^2 gir dermed likningen

$$-bu + au' = -b(ay' - by) + a(ay'' - by') = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2y'' - 2aby' + b^2y = 0$$

Dette er en homogen annenordens lineær differensiallikning, med karakteristisk likning

$$a^2r^2 - 2abr + b^2 = 0$$

Vi kan skrive dette som $(ar-b)^2 = 0$, og ser da at vi har en dobbel rot $r = b/a$. Alternativt kan vi finne løsningene for r ved abc-formelen. Den generelle løsningen av Euler-likningen er dermed

$$y = C_1e^{bt/a} + C_2t\,e^{bt/a} = (C_1 + C_2\,t)\,e^{bt/a}$$

Setter vi inn betingelsene $y(0) = 0$ og $y(T) = e^{bT/a}$, gir den første at $(C_1 + C_2 \cdot 0)e^0 = 0$, eller at $C_1 = 0$, og den andre at $C_2Te^{bT/a} = e^{bT/a}$, som gir $C_2T = 1$ eller $C_2 = 1/T$. Altså er

$$y^*(t) = \frac{t}{T}\,e^{bt/a}$$

(b) Vi sjekker om F er konkav i (y, y'); i så fall vet vi at y^* er en løsning av max-problemet. Vi regner derfor ut de andrederiverte

$$F''_{yy} = \frac{-b^2}{u^2}, \quad F''_{y,y'} = \frac{ab}{u^2}, \quad F''_{y',y'} = \frac{-a^2}{u^2}$$

og den Hessiske matrisen

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{y,y} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2} \cdot \begin{pmatrix} -b^2 & ab \\ ab & -a^2 \end{pmatrix}$$

Vi har satt faktoren som er felles utenfor. Vi ser at determinanten blir

$$\frac{1}{u^4} \cdot \begin{vmatrix} -b^2 & ab \\ ab & -a^2 \end{vmatrix} = 0$$

og at de to uttrykkene på diagonalen er negative. Derfor er F konkav i (y, y') og $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet.

(c) Vi har at $y = y^* = (t/T)\,e^{bt/a}$ gir $y' = (1/T)(1 \cdot e^{bt/a} + t \cdot e^{bt/a} \cdot (b/a)) = 1/T \cdot e^{bt/a}(1 + bt/a)$, og derfor er

$$ay' - by = \frac{a+bt}{T} \cdot e^{bt/a} - \frac{bt}{T} \cdot e^{bt/a} = \frac{a}{T} \cdot e^{bt/a}$$

Integralet får derfor verdien

$$J(y^*) = \int_0^T \ln\left(\frac{a}{T} \cdot e^{bt/a}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \ln(a) - \ln(T) + \frac{bt}{a}\,\mathrm{d}t = \left[t(\ln(a) - \ln(T)) + \frac{bt^2}{2a}\right]_0^T$$

$$= T\ln(a) - T\ln(T) + \frac{bT^2}{2a}$$