

Alle deloppgaver har samme vekt og gir maksimalt 6p hver. Svarene på de 15 ordinære deloppgavene gir maksimalt 90p (100%). Bonusoppgaver kan sløyfes, men gir opp til 6p ekstra per deloppgave om de besvares korrekt.

OPPGAVE 1.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) **(6p)** Regn ut $\det(A)$ og det karakteristiske polynomet $|A - \lambda I|$ til A .
- (b) **(6p)** Finn egenverdiene til A . Er A positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit?
- (c) **(6p)** Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.
- (d) **(6p)** Vi betrakter funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2 - 4xy + 4xz + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 2y - 10z + 5$$

Skriv f på matriseform, og bruk dette til å finne de stasjonære punktene til f . Er de stasjonære punktene maksimums- eller minimumspunkter?

- (e) **(6p)** La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ være kolonnevektorene til matrisen P som du fant ovenfor. Regn ut indreproduktene (prikkproduktene) $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, og bruk dette til å finne matrisen

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

Regn også ut matrisen $P^T P$.

- (f) **Bonus (6p)** Vis at dersom S er en symmetrisk matrise og \mathbf{v}, \mathbf{w} er to egenvektorer for S med ulike egenverdier, så er indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

OPPGAVE 2.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + 8xy) + y^4, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant k .

- (a) **(6p)** Bestem k . Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
- (b) **(6p)** Finn $E(X)$ og $\text{Var}(X)$.
- (c) **(6p)** Finn $E(XY)$.
- (d) **(6p)** Finn $E(Y)$. Er X og Y uavhengige?

La U og V være eksponentialfordelte variabler med parametre $\lambda_U = 2$ og $\lambda_V = 3$.

- (e) **(6p)** Bestem $\text{Var}(U + V)$ uttrykt ved hjelp av $\alpha = \text{Cov}(U, V)$. Skriv også ned sannsynlighetstettheten $f(u, v) = f_{U,V}(u, v)$ når U og V er uavhengige.

OPPGAVE 3.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger:

- (a) **(6p)** $y'' - 5y' - 14y = 10$
- (b) **(6p)** $e^t y' - e^t y = 1$
- (c) **(6p)** $y^2 - 2ty y' = 1$

OPPGAVE 4.

Anta at $a, b, T > 0$ er gitte positive konstanter. Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max J(y) = \max \int_0^T \ln(ay' - by) dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(T) = e^{bT/a} \end{cases}$$

- (a) **(6p)** Finn Euler-likningen for dette problemet, og bestem den entydige løsningen $y^* = y^*(t)$ av Euler-likningen som også oppfyller bibetingelsene.
- (b) **(6p)** Vis at $y^*(t)$ løser variasjonsproblemet.
- (c) **Bonus (6p)** Regn ut den maksimale verdien $J(y^*)$ av integralet.

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Noen viktige formler

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z)$

Binomisk fordeling

- $X \sim \text{Binom}(n, p)$ med $n \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$
- $p(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \dots, n$
- $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

- $X \sim \text{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
- $p(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \dots$
- $E(X) = 1/p$, $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
- $p(X = i) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$ for $i = 0, 1, 2, \dots$
- $E(X) = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

- $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ med $a < b$
- $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
- $E(X) = (a+b)/2$, $\text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Ekspontialfordeling

- $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
- $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
- $E(X) = 1/\lambda$, $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

- $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ med $\sigma > 0$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
- $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell-derivasjon Funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B \mathbf{x} + c$$

har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = (A + A^T) \mathbf{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \epsilon$$

basert på et datasett (N observasjoner) gitt ved

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Differensiallikninger

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dt = uv - \int uv' \, dt$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \, dt = \int f(u) \, du$$

Første ordens lineære differensiallikninger

En første ordens lineær differensiallikning

$$y' + a(t)y = f(t)$$

har løsning gitt ved

$$y = \frac{1}{u} \int f(t)u(t) dt$$

der integrerende faktor $u = u(t)$ er gitt ved

$$u(t) = e^{\int a(t) dt}$$

Andre ordens lineære differensiallikninger

En andre ordens lineær differensiallikning

$$y'' + ay' + b = f(t)$$

har generell løsning $y = y_h + y_p$ der den homogene løsningen y_h er gitt hjelp av røttene av den karakteristiske likningen

$$r^2 + ar + b = 0$$

Vi har følgende tilfeller:

- a) To røtter $r_1 \neq r_2$: $y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
- b) En dobbelrot r : $y_h = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$
- c) Ingen røtter: $y_h = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$
der $\alpha = -a/2$ og $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2$

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max / \min J(y) = \int_a^b F(t, y, \dot{y}) dt$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$
har Euler-likning

$$F'_y - \frac{d}{dt}(F'_y) = 0$$