Sist: vektorer

1) n-vektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

2) addisjon, subtraksjon skjer komponentvis $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

multiplikasjon med skalar

$$r \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5r \\ 2r \end{pmatrix}$$

3) skalarprodukt, indreprodukt, prikkprodukt

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \sum v_i \cdot w_i \quad \Big| \quad \underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

4) Lengden til en vektor

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

5) Cauchy-Schwartz ulikhet

$$|\underline{v} \cdot \underline{w}| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$$

6) 

$$\mathrm{Proj}_{\underline{w}} \underline{v} = \underline{v}_{\underline{w}} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{w}\|^2} \cdot \underline{w}$$

I dag:

- Lineære likningsystemer og Gauss-eliminasjon.
- lineær uavhengighet og basis.

n vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$W = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) =$ alle lineære kombinasjoner:

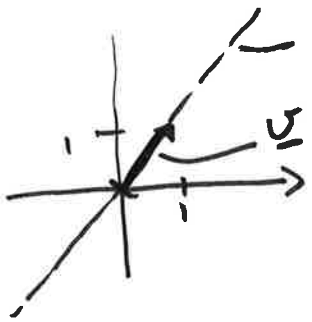
$r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_n \cdot \underline{v}_n$

Eks

$\text{span}(\underline{v})$ der $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

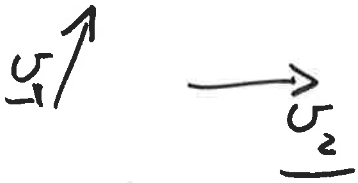
$= \{ r \cdot \underline{v} \}$

← linja er $\text{Span}(\underline{v})$



Eks.

$\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$



$= \{ r_1 \cdot \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 \}$

$=$ planet disse to genererer.

Eks.

$\underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_2 = c \cdot \underline{v}_1$

$\text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \{ r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 \}$

$= \{ r_1 \underline{v}_1 + r_2 c \cdot \underline{v}_1 \}$

$= \{ (r_1 + r_2 c) \underline{v}_1 \}$

$= \underline{\underline{\text{Span}(v_1)}}$

Et lineært underrom er et rom som kan skrives på formen

$$\text{span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)$$

Vektorene $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)$ kalles <u>lineært avhengige</u> hvis en (eller fler) av vektorene kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre. Hvis ikke er de <u>lineært uavhengige</u>.

<u>Eks.</u>

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineært uavhengige

<u>Eks.</u>

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Da er $\underline{v}_2 = -3 \cdot \underline{v}_1$ lineært avhengige.

Da er $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{span}(\underline{v}_1) = \text{span}(\underline{v}_2)$

Hvis $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_m$ er lineært avhengige og $\underline{v}_1 = r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_m \underline{v}_m$ så er

$$\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) = \text{Span}(\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m)$$

eks.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Her er $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$

$$\text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \text{Span}(v_1, v_2)$$

Hvis $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ er lineært uavhengige så kalles $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ en <u>basis</u> for $W = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r)$ og dimensjonen til W er r.

$\underline{v}_1, \dots \underline{v}_r$ er lineært uavhengige

$$\Updownarrow$$

$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_r \cdot \underline{v}_r = \underline{0}$ kun har løsningen $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_r = 0$

$(\underline{x} = \underline{0})$ triviell løsning.

eks.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Her

$$4 \cdot \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 7\, \underline{v}_3 = 0$$

$$x_1 = 4\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 7$$

Dermed finnes en ikke triviell løsning

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ slik at}$$

* $$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

Da er $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lineært avhengige. og $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ er ikke en ~~basis~~ basis.

* er et homogent likningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En likning på formen:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$ kalles

<u>homogen</u> hvis $b = 0$

Et system av m likninger med n variabler:

$$
\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Et tuppel $(s_1, \dots, s_n)$ som passer i likningene er en løsning.

Systemet kan ha <u>en</u>, <u>ingen</u> eller <u>uendelig mange</u> løsninger.

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 4 \\
x - y &= 2
\end{aligned}
$$

<u>en</u> løsning.

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 4 \\
4x - 2y &= 5
\end{aligned}
$$

<u>ingen</u> løsning

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 4 \\
4x - 2y &= 8
\end{aligned}
$$

<u>uendelig mange</u> løsninger.

Gauss eliminasjonsmetode for å løse alle lineære likningssystemer.

Vi hadde:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Utvidet koeffisientmatrise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad R2 := R2 + (-2) \cdot R1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad R3 := R3 + (-5) R1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad R3 := R3 + (-2) R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det første tallet i en rad som ikke er 0 kalles en <u>pivot</u>.

Alle pivot'er står lenger til høyre enn pivoten over.

Trappeformen er ikke entydig, men pivotposisjonene er det.

En variabel som hører til en kolonne uten pivot, kalles en fri variabel.

I eks. er x_3 fri

Systemet løses ved baklengs ~~substitu~~ substitusjon.

x_3

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 & & x_1 = -\tfrac{4}{7}x_3 \\ \text{II}: &\quad -7x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow & & x_2 = -\tfrac{1}{7}x_3 \\ \text{III}: &\quad x_3 \end{aligned}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7}x_3 \\ -\frac{1}{7}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Ved å velge $x_3 = -7$ får vi den løsningen vi hadde.

Ved Gauss eliminasjon kan vi bruke tre radoperasjoner:

1) Legge til et multippel av en annen rad.
2) Gange rad med $c \neq 0$
3) Bytte om rader.

Øvelse

Løs v.h.a. Gauss-eliminasjon

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + 4z = 7$$
$$x + 3y + 9z = 13$$

- lineært system
- utvidet koeff. matrix
- trappe form
- løs ved baklengs substitusjon.

Løsning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R2 := R2 - R1 \\ R3 := R3 - R1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \quad R3 := R3 - 2R2$$

$$* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$x + y + z = 3$$
$$y + 3z = 4$$
$$2z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$(x, y, z) = \underline{\underline{(1, 1, 1)}}$$

Koeffisientmatrise:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Utvidet koeffisientmatrise

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

vj.

$$* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad R3 := \tfrac{1}{2}\cdot R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R1 := R1 - R3 \\ R2 := R2 - 3\cdot R3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad R1 := R1 - R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Redusert trappeform
alle pivoter er 1
alle andre ~~posisjoner~~ koeffisienter er 0.

$$(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

Dette kalles Gauss-Jordan eliminasjon

Eks. 1

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - 3y &= 4 \\ 4x - y &= 1 \end{aligned}$$

G. E. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} R2 := R2 - 2 \cdot R1 \\ R3 := R3 - 4 \cdot R1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 \end{array}\right)$ $R3 := R3 - R2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$

Trappeform med pivot i siste kolonne i utvidet matrise

$\Updownarrow$

Systemet har ingen løsning.

Eks 2

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right)$ $R2 := R2 - R1$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

z fri.

$y = -3z + 4$

$x = 2z - 1$

$(x, y, z) = (2z - 1, -3z + 4, z)$

Oppsummering

Et system kalles **konsistent** hvis det har løsning og **ikke-konsistent** hvis det ikke har noen løsning.

Et system er ikke konsistent (ingen løsning)

$\Updownarrow$

Det er en pivot i den siste kolonnen i den utvidete matrisen. (Eks. 1)

Et system har uendelig mange løsninger

$\Updownarrow$

Det er ingen pivot i siste kolonne av utvidet matrise og det er minst en kolonne uten pivot. (Eks 2)

$\square$