BI HANDELSHØYSKOLEN

Skriftlig eksamen:	ELE 3719	Matematikk valgfag		
Eksamensdato:	Våren 2013	09:00 – 14:00	Totalt antall sider:	2
			Antall vedlegg:	1
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator			
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus			
Innføringsark:	Ruter			
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt	
Prøve-eksamen			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi	

Oppgave 1.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -s \\ s & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut $\det(A)$. For hvilke verdier av s har matriselikningen $AX = I$ løsninger?

(b) Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$ basert på de tre datapunktene

$$(y, x_1) = (2, 2),\ (5, 0),\ (-1, 3)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$, og tegn inn de tre datapunktene og beste tilpasning i et koordinatsystem.

Oppgave 2.

Vi betrakter den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2(a-2)x_1x_3$$

(a) Finn den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, og finn egenverdiene til A når $a = 3$.

(b) For hvilke verdier av a er den kvadratiske formen henholdsvis positiv definit, negativ definit og indefinit?

Oppgave 3.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

(a) $y' + 3y = e^t, \quad y(0) = 3$

(b) $y' = (t-2)y^2, \quad y(0) = 1$

(c) $y'' + 5y' + 6y = 1, \quad y(0) = 7/6,\ y'(0) = 0$

Oppgave 4.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{k(x+y)}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en konstant k.

(a) Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$? Hva slags fordeling har X?
(b) Finn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
(c) Er X og Y uavhengige stokastiske variable? Begrunn svaret.
(d) Finn $E(XY)$ og $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Oppgave 5.

En bedrift ønsker å fordele to kontrakter i et prosjekt helt tilfeldig blant tre firmaer A, B og C. Utvelgelsen skjer ved loddtrekning, og trekningen foregår slik at hvert av firmaene har mulighet til å få 0, 1 eller 2 kontrakter. Vi skriver (i, j) for utfallet at kontrakt 1 går til firma i og kontrakt 2 går til firma j, der i og j er enten A, B eller C.

(a) Skriv en komplett liste over mulige utfall. Hva er sannsynligheten for at A og B får en kontrakt hver? Hva er sannsynligheten for at A får minst en kontrakt?
(b) La X være antall kontrakter A får, og Y være antall kontrakter B får. Finn $P(X = x, Y = y)$ for alle x, y og $P(X = x)$ for alle x. Er X og Y uavhengige stokastiske variable?
(c) Anta nå at bedriften ønsker å fordele to kontrakter til ti firmaer istedet for tre, og at A er en av disse firmaene. La X være antall kontrakter A får. Fordelingen foregår fortsatt tilfeldig på tilsvarende måte som før. Hva slags fordeling har X? Hva er sannsynligheten for at firma A tildeles en kontrakt? Hva er sannsynligheten for at A tildeles minst en kontrakt?

Oppgave 6.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^2 e^{3y+2\dot{y}}\, \mathrm{d}t \quad \text{når} \quad y(0) = 3,\ y(2) = 3 + e^{-3}$$

(a) Vis at Euler-likningen for dette problemet er en lineær andre ordens differensiallikning, og løs den. Hint: Se etter en partikulær løsning på formen $y_p = At$.
(b) Finn løsningen y^* av variasjonsproblemet. Gir denne løsningen max eller min?

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Noen viktige formler

a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
c) $E(aX+b) = a\,E(X) + b$
d) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
e) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
f) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
g) $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) =$
$a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

Binomisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \dots, n$
c) $E(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X=i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \dots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X=i) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ for $i = 0, 1, 2, \dots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \mathrm{Uniform}(a,b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell-derivasjon Funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$$

har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = (A + A^T)\mathbf{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \epsilon$$

basert på et datasett (N observasjoner) gitt ved

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Differensiallikninger

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \; \mathrm{d}t = uv - \int uv' \; \mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \; \mathrm{d}t = \int f(u) \; \mathrm{d}u$$

Første ordens lineære differensiallikninger
En første ordens lineær differensiallikning

$$y' + a(t)y = f(t)$$

har løsning gitt ved

$$y = \frac{1}{u} \int f(t)u(t)\ \mathrm{d}t$$

der integrerende faktor $u = u(t)$ er gitt ved

$$u(t) = e^{\int a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Andre ordens lineære differensiallikninger
En andre ordens lineær differensiallikning

$$y'' + ay' + b = f(t)$$

har generell løsning $y = y_h + y_p$ der den homogene løsningen y_h er gitt hjelp av røttene av den karakteristiske likningen

$$r^2 + ar + b = 0$$

Vi har følgende tilfeller:

a) To røtter $r_1 \neq r_2$: $y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
b) En dobbelrot r: $y_h = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$
c) Ingen røtter: $y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ der $\alpha = -a/2$ og $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2$

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max / \min J(y) = \int_a^b F(t, y, \dot{y})\ \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{\dot{y}}) = 0$$