BI HANDELSHØYSKOLEN

Løsning:	**ELE 3719**	**Matematikk valgfag**		
Eksamensdato:	Våren 2013	09:00 – 14:00	Totalt antall sider:	4
			Antall vedlegg:	0
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator			
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus			
Innføringsark:	Ruter			
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt	
Prøve-eksamen			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi	

Oppgave 1.

(a) Vi utvikler determinanten langs første kolonne og dette gir

$$\det(A) = 1(-1+3) - s(-2+3s) + 1(-2+s) = -3s^2 + 3s$$

Likningen $AX = I$ har løsninger hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$, og vi ser dette ved følgende argument: Hvis $\det(A) \neq 0$, så er A invertibel og $X = A^{-1}I = A^{-1}$ er en løsning. Hvis $\det(A) = 0$, så kan ikke likningen ha løsning, for i så fall er $\det(AX) = \det(I) = 1$, men vi har $\det(AX) = \det(A)\det(X) = 0$. Til slutt ser vi at $\det(A) = 0$ for $s = 0$ og $s = 1$, så matriselikningen har løsning for $s \neq 0, 1$.

(b) Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dermed blir

$$X^T X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

med $\det(X^T X) = 14 \neq 0$, og beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 73 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 73/14 - 27/14\, x_1 \cong 5.21 - 1.93\, x_1$.

Oppgave 2.

(a) Den symmetriske matrisen A blir

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & a-2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ a-2 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 - (a-2)^2)) = 0$$

som gir $\lambda = 1$ og $\lambda = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - (a-2)^2)} = a \pm |a-2| = a \pm (a-2) = 2, 2a-2$. Når $a = 3$ blir egenverdiene $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 4$.

(b) Den kvadratiske formen er positiv definit om alle egenverdier er positive, og dette vil skje om $a > 1$. Når $a < 1$ så har A både postive og negative egenverdier, og A er indefinit. Om $a = 1$, så er egenverdiene $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 0$, og A er da hverken positiv definit, negativ definit eller indefinit (men positiv semidefinit).

Oppgave 3.

(a) Likningen $y' + 3y = e^t$ er lineær, med integrerende faktor e^{3t}. Dermed kan den skrives som

$$(ye^{3t})' = e^t e^{3t} = e^{4t} \quad \Rightarrow \quad ye^{3t} = \int e^{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}e^{4t} + \mathcal{C}$$

Dette gir $y = e^t/4 + \mathcal{C}e^{-3t}$, og $y(0) = 3$ gir $3 = 1/4 + \mathcal{C}$, eller $\mathcal{C} = 11/4$. Dermed er løsningen

$$y = \frac{e^t + 11e^{-3t}}{4}$$

(b) Likningen $y' = (t-2)y^2$ er separabel, og kan skrives som

$$1/y^2 \cdot y' = t - 2 \quad \Rightarrow \quad \int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int t - 2\,\mathrm{d}t$$

Dette gir $-1/y = t^2/2 - 2t + \mathcal{C}$. Initalbetingelsen $y(0) = 1$ gir $-1 = \mathcal{C}$, og dermed er $-1/y = t^2/2 - 2t - 1$. Dette gir løsning

$$y = -\frac{1}{t^2/2 - 2t - 1} = \frac{-2}{t^2 - 4t - 2}$$

(c) Likningen $y'' + 5y' + 6y = 1$ er andre ordens lineær, og har løsning $y = y_h + y_p$. Den homogene løsningen y_h finner vi ved å løse den karakteristiske likningen

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2, -3$$

Dermed er $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$. Vi finner en konstant partikulær løsning $y_p = A$ ved innsetting, som gir $6A = 1$, eller $y_p = A = 1/6$. Dermed blir den generelle løsningen $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + 1/6$. Initialbetingelsene $y(0) = 7/6$, $y'(0) = 0$ gir $7/6 = C_1 + C_2 + 1/6$ og $0 = -2C_1 - 3C_2$. Vi løser dette likningssystemet og får $C_1 = 3$ og $C_2 = -2$, som gir løsning

$$y = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + 1/6$$

Oppgave 4.

(a) Vi ser at $f(x,y) \geq 0$. Vi regner så ut $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{k(x+y)}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{k}e^{k(x+y)}\right]_0^\infty = \frac{1}{k}e^{kx}(e^{k\cdot\infty} - 1)$$

Vi ser at grenseverdien $e^{k\infty} = \lim_{y\to\infty} e^{ky} = 0$ når $k < 0$ og at den ikke eksisterer når $k > 0$. Når $k = 0$ er den 1. Dermed må vi ha $k < 0$ (for vi kan ikke ha $f_X(x) = 0$). Altså er $f_X(x) = -1/k \cdot e^{kx}$. For å bestemme k regner vi ut

$$\int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty -\frac{1}{k}e^{kx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k^2}\left[e^{kx}\right]_0^\infty = \frac{1}{k^2}$$

Siden dette uttrykket skal være lik 1 (summen av sannsynlighetene) og $k < 0$, må vi ha $k = -1$. Dermed er $f_X(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Dette betyr at X er eksponensielt fordelt med $\lambda_X = 1$.

(b) Vi vet at $E(X) = 1/\lambda_X = 1$ og $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda_X^2 = 1$ når X er eksponsielt fordelt med $\lambda_X = 1$. Alternativt kan vi finne dette ved å regne ut integralene for $E(X)$ og $E(X^2)$.

(c) Vi ser at $f_Y(y) = e^{-y},\ y \geq 0$ siden $f(x,y)$ er symmetrisk i x og y, slik at Y også er eksponentielt fordelt med $\lambda_Y = 1$. Dermed er $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ siden $e^{-(x+y)} = e^{-x-y} = e^{-x}e^{-y}$, og dette betyr at X og Y er uavhengige.

(d) Siden X og Y er uavhengige, har vi at

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 1 \cdot 1 = 1$$

Vi har brukt at X, Y er eksponentielt fordelt med $\lambda_X = \lambda_Y = 1$. Alternativt kunne vi regnet ut integralet for $E(XY)$ og $E(Y)$. Vi har dermed at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.

Oppgave 5.

(a) Utfallsrommet er $\{(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C)\}$. Sannsynligheten for at A og B får en kontrakt hver er $p(A,B) + p(B,A) = 2/9$. Sannsynligheten for at A får minst en kontrakt er $5/9$ siden det er fem gunstige utfall i utfallsrommet.

(b) Sannsynlighetstettheten $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ er gitt ved tabellen

	y = 0	y = 1	y = 2
x = 0	1/9	2/9	1/9
x = 1	2/9	2/9	0
x = 2	1/9	0	0

Dette gir

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 0 \\ 4/9, & x = 1 \\ 1/9, & x = 2 \end{cases}$$

Fordelingen til Y er helt tilsvarende, det ser vi ved hjelp av symmetri, så

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4/9, & y = 0 \\ 4/9, & y = 1 \\ 1/9, & y = 2 \end{cases}$$

For eksampel er $f(0,0) = 1/9 \neq f_X(0)f_Y(0) = 4/9 \cdot 4/9$, så X og Y er ikke uavhengige.

(c) Tildeling av kontrakt 1 og kontrakt 2 er uavhengig av hverandre, og sannsynligheten for at A tildeles kontrakten er i hvert tilfelle $p = 1/10$. Dermed er X binomisk fordelt med $p = 1/10$ og $n = 2$. Sannynligheten for at A tildeles en kontrakt er gitt ved

$$p(X = 1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = 2 \cdot 1/10 \cdot 9/10 = 18/100 = 0.18$$

Sannsynligheten for at A tildeles minst en kontrakt er gitt ved $p(X = 1) + p(X = 2) = 0.19$, siden

$$p(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = (1/10)^2 = 0.01$$

Oppgave 6.

(a) Vi har at $F = e^{3y + 2\dot{y}} = e^u$ med $u = 3y + 2\dot{y}$. Dette gir

$$F'_y = e^u \cdot 3 = 3e^u, \quad F'_{\dot{y}} = e^u \cdot 2 = 2e^u$$

Dermed blir

$$\frac{d}{dt} F'_{\dot{y}} = 2e^u u'_t = 2e^u(3\dot{y} + 2\ddot{y}) = (6\dot{y} + 4\ddot{y})e^u$$

og Euler-likningen blir

$$3e^u - (6\dot{y} + 4\ddot{y})e^u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\ddot{y} + 6\dot{y} = 3$$

Dette er en lineær andre ordens differensiallikning med løsning $y = y_h + y_p$, og vi finner y_h ved å løse den karakteristiske likningen

$$4r^2 + 6r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0,\ r = -3/2$$

Dermed er $y_h = C_1 e^{0\,t} + C_2 e^{-3/2\,t} = C_1 + C_2 e^{-3/2\,t}$. Vi ser så etter en partikulær løsning på formen $y_p = At$ for en konstant A, og finner ved innsetting at $4 \cdot 0 + 6 \cdot A = 3$, som gir løsning $A = 1/2$ og $y_p = t/2$. Dermed er løsningen av Euler-likningen gitt ved

$$y^* = C_1 + C_2 e^{-3/2\,t} + t/2$$

(b) Vi regner ut de andre ordens partiell-deriverte av F og finner

$$F''_{yy} = 9e^u, \quad F''_{y\dot{y}} = 6e^u, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = 4e^u$$

Dermed er $F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$ og $F''_{yy}, F''_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, så F er konveks i $(y, \dot{y})$. Dermed gir løsningen y^* av Euler-likningen og initialbetingelsene et minimum. Vi finner y^* ved å sette inn initialbetingelsene: $y(0) = 3$ gir $C_1 + C_2 = 3$, og $y(2) = 3 + e^{-3}$ gir $C_1 + C_2 e^{-3} + 1 = 3 + e^{-3}$. Vi løser likningene og finner at $C_2 = 1$ og $C_1 = 2$, så minimum er gitt ved

$$y^* = 2 + e^{-3/2\,t} + t/2$$