BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

Prøve-eksamen i:	**ELE 3719 Matematikk valgfag**
Dato:	XX.YY.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	2

Oppgave 1.

Vi betrakter profittfunksjonen $\pi(x, y) = -240 + 20x + 25y - 3x^2 + 10xy - 9y^2$. For enkelhets skyld antar vi at π er definert for alle par (x, y) av reelle tall.

(a) Når vi skriver $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$ på vektorform, kan vi skrive funksjonen π på matriseform som

$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$$

hvor A er en symmetrisk matrise, B er en radvektor og C er en konstant. Finn A, B og C. Regn også ut vektoren

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \pi'_x \\ \pi'_y \end{pmatrix}$$

(b) Finn egenverdiene til A. Avgjør om A er positiv semidefinit, negativ semidefinit eller indefinit.

(c) Vis at π har et entydig maksimumspunkt, og finn den tilhørende maksimumsverdien.

Oppgave 2.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi for A. Finn de andre egenverdiene til A.

(b) Finn alle egenvektorer for A med egenverdi $\lambda = 3$.

(c) Vis at dersom $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ er egenvektorer for A med forskjellige egenverdier, så er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

Oppgave 3.

(a) Løs differensiallikningen $e^t y' = y^2$, $y(0) = 1/2$.

(b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $t^3 y' + 2y = 1$.

Oppgave 4.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^3 \ln(\dot{y} + y + e^{-t})\,\mathrm{d}t, \quad y(0) = 2,\ y(3) = 5e^{-3}$$

(a) Vis at Euler-likningen, etter at den er forenklet, kan skrives på formen $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = k$, der a, b, c, k er konstanter, og bestem konstantene a, b, c, k.
(b) Finn løsningen av Euler-likningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.
(c) Gir løsningen av Euler-likningen maksimum eller minimum? Hva blir den optimale verdien av integralet?

Oppgave 5.

Aksjen Statoil omsettes nå for kr 151.10 på Oslo Børs. Vi ønsker å vurdere kursutviklingen de neste 5 handelsdagene og benytter følgende enkle sannsynlighetsmodell: Vi antar at i løpet av en handelsdag vil prisen enten gå opp med en faktor $u > 1$ eller ned med en faktor $d < 1$. Vi antar videre at sannsynligheten for en bevegelse opp en gitt handelsdag er p og for en bevegelse ned er $1 - p$, og til slutt at bevegelsene de ulike handelsdagene er uavhengige av hverandre. Basert på historiske data fra de siste 100 handelsdagene, går vi ut i fra at $u = 1.012$, $d = 1/u \simeq 0.988$ og at $p = 0.53$. En modell av denne typen kalles en *binomisk modell*.

(a) La X være antall handelsdager med prisbevegelse opp blant de neste 5 handelsdagene. Hvilken fordeling har den stokastiske variabelen X? Regn ut $P(X = 3)$ og $P(X \geq 3)$.
(b) Finn $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.
(c) La Y være prisen på aksjen Statoil etter 5 handelsdager. Uttrykk Y ved hjelp av X, og finn $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.
(d) La Z være den minste sluttkursen i løpet av de 5 handelsdagene. Regn ut $P(Z < 146)$.

Oppgave 6.

La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Finn $f_X(x)$. Hva slags fordeling har den stokastiske variabelen X?
(b) Regn ut $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.
(c) Regn ut den betingede sannsynlighetstettheten $f_{Y|X}(y|x)$ når $x \geq 0$.
(d) Finn $f_Y(y)$. Er X og Y uavhengige stokastiske variable?
(e) Finn $P(X \geq 1, Y \leq 1)$.