Oppgaveark 8
ELE 3719 Matematikk Valgfag

Handelshøyskolen BI

Oppgaver

1. Estimer β_0, β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ut fra de to observasjonene

$$(x_1, y_1) = (0, 1)$$
$$(x_2, y_2) = (1, 0)$$

Kan du komme frem til svaret på en annen måte?

2. Estimer β_0, β_1 og β_2 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \varepsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$y_1 = 2, (x_{11}, x_{12}) = (1, 1)$$
$$y_2 = 0, (x_{21}, x_{22}) = (1, 0)$$
$$y_3 = 1, (x_{31}, x_{32}) = (0, 0)$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

3. Estimer β_0, β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$(x_1, y_1) = (0, 1)$$
$$(x_2, y_2) = (1, 0)$$
$$(x_3, y_3) = (1, 1)$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

4. Estimer $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ ut fra observasjonene

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, y_1) = (13, 3, -1, 7)$$
$$(x_{21}, x_{22}, x_{23}, y_2) = (10, 14, 3, 8)$$
$$(x_{31}, x_{32}, x_{33}, y_3) = (2, 1, 5, 9)$$
$$(x_{41}, x_{42}, x_{43}, y_4) = (1, 4, 1, 3)$$
$$(x_{51}, x_{52}, x_{53}, y_5) = (4, 11, 3, 4)$$
$$(x_{61}, x_{62}, x_{63}, y_6) = (0, 0, 0, 4)$$

(Hint: Dersom du ikke har en kalkulator som kan regne med matriser, kan du for eksempel bruke Wolfram Alpha eller Microsoft Mathematics).

5. La X, Y, Z være stokastiske variable og la c være en konstant. Vis at

a) $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$

c) $\mathrm{Cov}(cX,Y) = c\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
d) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y) = \mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

6. La X_1, X_2 være stokastiske variable. Vi definerer forventningsvektoren μ og kovariansmatrisen Σ ved

$$\mu = \begin{pmatrix} E[X_1] & E[X_2] \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2,X_2) \end{pmatrix}$$

La $Y = a_1X_1 + a_2X_2$. Vis at $E[Y] = \mu \cdot \mathbf{a}$ og at $\mathrm{Var}[Y] = \mathbf{a}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{a}$.

7. La X_1, X_2, X_3 være stokastiske variable, med forventningsvektor μ og kovariansmatrise Σ gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La $Y = 5X_1 - X_2 + 2X_3$. Finn $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.

8. La X_1 og X_2 være stokastiske variable med henholdsvis forventingsverdier og kovariansmatrise gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Hvis mulig, bestem a_1 og a_2 slik at $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ har minst mulig varians $\mathrm{Var}[Y]$ og samtidig slik at $E[Y] = 6$.

9. La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige stokastiske variable med samme sannsynlighetsfordeling, og la $\mu = E[X_i]$ og $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi definerer *(empirisk) gjennomsnitt* $\overline{X}$ ved

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Vis at $E[\overline{X}] = \mu$ og at $\mathrm{Var}[\overline{X}] = \sigma^2/n$.

10. Følgende differentiallikninger kan løses ved å integrere høyre side. Finn den generelle løsningen i hvert tilfelle, og finn også den partikulære løsningen som oppfyller $y(0) = 1$.

a) $y' = 2t$
b) $y' = e^{2t}$
c) $y' = (2t+1)e^{t^2+t}$

11. Vis at $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ er en løsning av $y' + y = e^t$.

12. Løs differensiallikningen $y^2y' = t + 1$. Finn løsningen som oppfyller $y(1) = 1$.

13. Løs følgende differensiallikninger:

a) $y' = t^3 - t$
b) $y' = te^t - 1$
c) $e^y y' = t + 1$

14. Løs følgende differensiallikninger. Her er $y = f(x)$ en funksjon av x, og ikke t som i tidligere oppgaver.

a) $y' = \frac{x}{y}$
b) $y' = e^{x-y}$
c) $x^2 y' = 2$

Løsning: Oppgaveark 8

1) $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

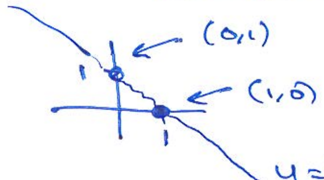
$X^tX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(X^tX)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\beta_0 = 1, \ \beta_1 = -1$

$y = 1 - x$

Alt:



$y = 1 - x$ ← Linjen gjennom de to punktene.

2) $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = (X^tX)^{-1} \cdot (X^t y) = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$y = \underline{1 - x_1 + 2x_2}$

$y - X \cdot \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0}$

(de tre punktene ligger i et plan)

3) $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = (X^tX)^{-1} \cdot X^t y = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$

$y = \underline{1 - \frac{1}{2}x}$

$\underline{\varepsilon} = y - X\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

4) $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 3 & -1 \\ 1 & 10 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = (X^tX)^{-1} \cdot (X^t y) \cong \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3.10 \\ 0.48 \\ -0.29 \\ 1.04 \end{pmatrix}}}$

Har brukt MS Mathematics

5.) BI

a) $\text{Cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)\cdot E(X) = \text{Var}(X)$

b) $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$= E(YX) - E(Y)E(X) = \text{Cov}(Y,X)$

c) $\text{Cov}(cX,Y) = E(cX\cdot Y) - E(cX)\cdot E(Y)$
$= c\,E(XY) - c\,E(X)E(Y) = c\cdot \text{Cov}(X,Y)$

d) $\text{Cov}(X_1+X_2,Y) = E((X_1+X_2)Y) - E(X_1+X_2)E(Y)$
$= E(X_1Y + X_2Y) - (E(X_1)+E(X_2))E(Y)$
$= E(X_1Y) - E(X_1)E(Y) + E(X_2Y) - E(X_2)\cdot E(Y)$
$= \underline{\text{Cov}(X_1,Y) + \text{Cov}(X_2,Y)}$

6) $Y = a_1X_1 + a_2X_2$:

$E(Y) = a\,E(X_1) + a_2 E(X_2) = \begin{pmatrix} E(X_1) & E(X_2)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = \mu\cdot \underline{a}$

$\text{Var}(Y) = \text{Cov}(a_1X_1 + a_2X_2,\ a_1X_1 + a_2X_2)$
$= a_1^2\,\text{Cov}(X_1,X_1) + a_1a_2\,\text{Cov}(X_1,X_2) + a_2a_1\,\text{Cov}(X_2,X_1)$
$+ a_2^2\,\text{Cov}(X_2,X_2) = \underline{a}^T\cdot \Sigma\cdot \underline{a}$

7) $Y = 5X_1 - X_2 + 2X_3$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow E(Y) = (4\ \ {-2}\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2\end{pmatrix} = \underline{28}$

$\text{Var}(Y) = (5\ \ {-1}\ \ 2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2\end{pmatrix} = \underline{89}$

8) $(4\ \ 2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = 4a_1 + 2a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = \frac{6-4a_1}{2} = \underline{3-2a_1}$

$\text{Var}(Y) = \underline{a}^T\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7\end{pmatrix}\underline{a} = a_1^2 + 4a_1a_2 + 7a_2^2 = a_1^2 + 4a_1(3-2a_1) + 7(3-2a_1)^2$
$= a_1^2 + 12a_1 - 8a_1^2 + 7(9 - 12a_1 + 4a_1^2) = 21a_1^2 - 72a_1 + 63$

$\text{Var}(Y)'_{a_1} = 42a_1 - 72 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{72}{42} = \frac{12}{7}$ $\underline{\text{min}}$ siden $\text{Var}(Y)''_{a_1} = 42 > 0$

$\Rightarrow a_1 = \underline{12/7}$, $a_2 = 3 - 2\cdot 12/7 = \underline{-3/7}$

BI

9.) $E(\bar{x}) = \frac{1}{n}\left(E(x_1) + \dots + E(x_n) \right) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \underline{\mu}$

$Var(\bar{x}) = Cov\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n), \frac{1}{n}(x_1 \dots + x_n) \right)$

$= \frac{1}{n^2} \cdot \Big(\underbrace{Cov(x_1, x_1)}_{= Var(x_1)} + \underbrace{Cov(x_1, x_2)}_{= 0} + \dots \Big)$

$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \underline{\sigma^2/n}$

10.)

a) $y' = 2t \Rightarrow y = \int 2t\,dt = t^2 + C$

$y(0) = 1: \quad 1 = 0^2 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = \underline{t^2 + 1}$

b) $y' = e^{2t} \Rightarrow y = \int e^{2t}\,dt = \frac{1}{2} e^{2t} + C$

$y(0) = 1: \quad 1 = \frac{1}{2} e^0 + C = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 1/2 \Rightarrow y = \underline{\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2}}$

c) $y' = (2t+1) e^{t^2+t} \Rightarrow y = \int (2t+1) e^{t^2+t}\,dt = e^{t^2+t} + C$

$y(0) = 1: \quad 1 = e^0 + C = 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = \underline{e^{t^2+t}}$

11.) $y = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ VS: $y' + y = \left(-\cancel{Ce^{-t}} + \frac{1}{2}e^t\right) + \left(\cancel{Ce^{-t}} + \frac{1}{2}e^t\right) = e^t$

HS: e^t

12) $y^2 y' = t + 1 \qquad \int y^2 y'\,dt = \int t+1$

$\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} t^2 + t + C$

$y(1) = 1: \quad \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 = -7/6$

$\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} t^2 + t - 7/6$

$y^3 = \frac{3}{2} t^2 + 3t - 7/2 \qquad \underline{\underline{y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} t^2 + 3t - \frac{7}{2}}}}$

13)

a) $y' = t^3 - t \Rightarrow y = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + C$

b) $y' = te^t - 1 \Rightarrow y = te^t - \int 1 \cdot e^t - t$

$= te^t - e^t - t + C$

c) $e^y \cdot y' = t + 1$

$e^y = \frac{1}{2}t^2 + t + C$

$y = \ln(1/2 t^2 + t + C)$

14)

a) $y' = \frac{x}{y}$ $\quad y y' = x$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$

b) $y' = e^{x-y}$ $\quad e^y y' = e^x$

$e^y = e^x + C$

$y = \ln(e^x + C)$

c) $x^2 y' = 2$ $\quad y' = 2/x^2$

$y = \int 2/x^2 \, dx = -\frac{2}{x} + C$