Oppgaveark 7
ELE 3719 Matematikk Valgfag

Handelshøyskolen BI

Oppgaver

1. Undersøk om det homogene likningssystemet har ikke-trivielle løsninger:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Finn alle løsninger av det homogene likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hvor mange frihetsgrader har dette likningssystemet?

3. Vi betrakter det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der A er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

og s er en parameter. For hvilke verdier av s har dette likningssystemet ikke-trivielle løsninger? Finn eventuelt antall frihetsgrader i hvert tilfelle.

4. Finn egenverdiene til A, og bruk dem til å finne $\det(A)$ og $\operatorname{tr}(A)$ i hvert tilfelle:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Finn alle egenvektorene til matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finn alle egenvektorene til A når $s = 2$.

7. Finn alle egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 17 & 89 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

8. En kvadratisk matrise $A = (a_{ij})$ slik at $a_{ij} = 0$ når $i > j$ (altså at den delen av matrisen som er under diagonalen er null) kalles *øvre triangulær*. Hva kan du si om egenverdiene til en øvre triangulær matrise?

9. Skriv ned et uttrykk for funksjonen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ i hvert tilfelle:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

10. Finn i hvert tilfelle den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

a) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$
b) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

11. Klassifiser de kvadratiske formene som positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt:

a) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2$
b) $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2$
c) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - x_2^2$
d) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$

12. Gjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ til en kvadratisk form i de nye variablene u og v ved å gjøre variabelskiftet $u = x_1 + x_2$ og $v = x_1 - x_2$. Er Q positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt?

13. Avgjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definit eller negativ (semi)definit i hvert tilfelle:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

14. Klassifiser de kvadratiske formene som positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit:

a) $Q(x_1, x_2) = x_1x_2$
b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_3^2$
c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$

15. La A være en symmetrisk 2×2-matrise.

a) Vis at A er positiv definit hvis og bare hvis $\det(A) > 0$ og $\operatorname{tr}(A) > 0$.
b) Vis at A er indefinit hvis og bare hvis $\det(A) < 0$.

16. La A være en (ikke nødvendigvis kvadratisk) matrise, og la $B = A^T A$. Vis at B er en kvadratisk, symmetrisk og positiv semidefinit matrise. Vis også at hvis A er en kvadratisk invertibel matrise, så er B positiv definit.

17. Finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når f er funksjonen gitt ved

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 + x_3^2$$

18. Skriv den kvadratiske formen f på matriseform og finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når

a) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2$
b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$

19. Skriv funksjonen f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ og finn de stasjonære punktene. Er de stasjonære punktene maksimum- eller minimumspunkter?

a) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 3$
b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - x_1$

20. Finn den deriverte av matrisefunksjonene A og B med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

Vis at $(3A+2B)'_t = 3A'_t + 2B'_t$ og at $(AB)'_t = A'_t B + AB'_t$.

21. Finn den deriverte av matrisefunksjonene A og A^2 med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

22. La $f(t) = \mathbf{b}^T A\mathbf{c}$, der

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & t \\ 0 & t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn $\frac{\partial f}{\partial t}$ ved hjelp av produktregelen for derivasjon av matriser.

23. Vi bruke regnereglene for derivasjon av matrisefunksjoner til å derivere en kvadratisk form $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

a) Vis at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1$, der $\mathbf{e}_1$ er kolonnevektoren som har 1 på første plass og 0 ellers.
b) Vis at $(\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T A^T \mathbf{x}$ og konkluder at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T (A+A^T)\mathbf{x}$.
c) Forklar at $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i^T (A+A^T)\mathbf{x}$ der $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har 1 på i'te plass og 0 ellers.
d) Vis at $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (A+A^T)\mathbf{x} = 2A\,\mathbf{x}$

Løsninger Oppgaveark 7

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ kun triviell løsning $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right)$

$x + y + z = 0$
$-y - 4z = 0$
z fri

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -4z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftarrow$ $x = 3z$, $y = -4z$, $z = $ fri

(én fri variabel = én frihetsgrad)

3) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6s \Rightarrow$ $|A| = 0$ for $s = 0$, $|A| \neq 0$ " $s \neq 0$

$s \neq 0$: kun triviell løsn. $\underline{x = 0}$

$s = 0$: ikke-trivielle løsninger

$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

når $s=0$ har vi én frihetsgrad

(x_3 er fri)

4) a) $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

$|A| = (-1)\cdot(-1)(-2) = \underline{-2}$ $\quad tr(A) = -1 + (-1) + (-2) = \underline{-4}$

b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \underline{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

$|A| = \frac{9-5}{4} = \underline{1}$ $\quad tr\,A = \underline{3}$

c) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(\lambda^2-8\lambda+14)=0 \Rightarrow \underline{\lambda_1=4}$

eller

$\lambda = \frac{8\pm\sqrt{64-56}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{8}}{2} = \underline{4\pm\sqrt{2}}$

$\det(A) = 14\cdot 4 = \underline{56} \qquad tr(A) = \underline{12}$

5.) $\underline{\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2:}$

i) $\underline{\lambda=-1:}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0} \Rightarrow$ x_1 fri, $x_2=0$, x_3 fri $\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{x_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

ii) $\underline{\lambda=-2:}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0} \Rightarrow$ $x_1=0$, x_2 fri, $x_3=0$ $\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{x_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

6) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & -2 \\ 0 & s-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (s-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (s-\lambda)\cdot(\lambda^2-5\lambda+6)=0$

$\underline{\lambda=s \text{ eller } \lambda=2,\ \lambda=3}$

$\underline{s=2:}$ $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

$\underline{\lambda=2:}$ $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0}$ +1

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0}$

$-x_1-2x_3=0 \Rightarrow x_1 = \underline{-2x_3}$

$8x_2=0 \Rightarrow \underline{x_2=0}$

x_3 fri

$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{x_3\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

$\underline{\lambda=3:}$ $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0}$ $\quad x_1=-x_3$, $x_2=0$, x_3 fri $\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{x_3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

7.)
$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 17 & 89 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -2}$$

8) A øvre triangulær $\Rightarrow$ Egenverdiene er verdiene på diagonalen:

$$\underline{\lambda_1 = a_{11} \quad \lambda_2 = a_{22} \quad \dots \quad \lambda_n = a_{nn}}$$

9)
a) $-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

c) $3x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$

10)
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

11.)
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ <u>pos. defn</u> $(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 > 0)$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ <u>neg. defn.</u> $(\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4 < 0)$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ <u>indefinit</u> $(\lambda_1 = 3 > 0, \lambda_2 = -1 < 0)$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <u>indefinit</u> $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4 > 0, \lambda_3 = -1 < 0)$

$$\left(\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \qquad \lambda = 1,\ \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1 \right)$$

BI

12) $Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2$

$$\begin{cases} u = x_1 + x_2 \\ v = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$Q = 4x_1x_2 \Longleftarrow \begin{cases} x_1 = \frac{u+v}{2} \\ x_2 = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$= \cancel{4} \cdot \frac{u+v}{\cancel{2}} \cdot \frac{u-v}{\cancel{2}}$$

$$= (u+v)(u-v) = \underline{u^2 - v^2}$$

$\underline{Q \text{ er indefinit}}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1)$

13)

a) $\lambda = -1, -1, -2 \Rightarrow$ neg. defn

b) $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow$ pos. defn.

c) $\lambda = 4, 4 \pm \sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ pos. defn.

14)

a) Indefinit $(\lambda = 1, \lambda = -1)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 3, \ \lambda^2 - 5 = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ indefinit

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = -1, \ \lambda^2 - 1/4 = 0$, $\lambda = \pm 1/2$ $\Rightarrow$ indefinit

15) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

Egenverdier: λ_1, λ_2

$$\text{tr}(A) = a + c = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\det(A) = ac - b^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

a) Pos. defn. $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow |A| > 0, \ \text{tr}A > 0$

b) Indefinit $\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow |A| < 0$

16) $\underset{m \times n}{A} \rightsquigarrow B = A^T A$ $\quad (n \times m) \cdot (m \times n) = (n \times n)$

* B kvadratisk $(n \times n)$

* B symmetrisk:

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T \cdot A = B$$

* B positiv semi-definit:

$$\underline{x}^T B \underline{x} = \underline{x}^T A^T A \underline{x} = (A\underline{x})^T \cdot (A\underline{x}) \underset{(y = A\underline{x})}{=} \underline{y}^T \cdot \underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ B pos. semidefn.

Hvis A er kvadratisk og invertibel:

A $n \times n$, $|A| \neq 0 \Rightarrow |B| = |A^T A| = |A| \cdot |A| \neq 0$

Anta at B har egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ pos. semidefinit} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ |B| \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_n \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0 \\ \underline{B \text{ pos. defn.}} \end{array}$$

17.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C$

$C = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

18) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x}}$

19) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = 3$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-252} \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ -16 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -26/252 \\ -44/252 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} -13/126 \\ -11/63 \end{pmatrix}$$

Sadelpunkt (A indefinit)

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \underline{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Sadelpunkt (A indefinit)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

20.)

$$A = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix} \qquad A'_t = \underline{\begin{pmatrix} 3t^2 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix} \qquad B'_t = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}}$$

$$(AB)'_t = A \cdot B'_t + A'_t \cdot B = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t^2 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t^3 + 3t^2 + 2t^3 & t^3 + 3t^4 + 3t^3 + 2t^4 \\ 2t + 1 & t + 3t^2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 + 4t^3 & 4t^3 + 5t^4 \\ 2t + 1 & 2t + 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} t^3 + t^4 & t^4 + t^5 \\ t + t^2 & t^2 + t^3 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)'_t = \begin{pmatrix} 3t^2 + 4t^3 & 4t^3 + 5t^4 \\ 1 + 2t & 2t + 3t^2 \end{pmatrix}$$ ok.

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3t^3 + 2 & 3t^2 + 2t \\ 3t + 2t^2 & 3 + 2t^3 \end{pmatrix} \Rightarrow (3A + 2B)'_t = \begin{pmatrix} 9t^2 & 6t + 2 \\ 3 + 4t & 6t^2 \end{pmatrix}$$

$$3A'_t + 2B'_t = \begin{pmatrix} 9t^2 & 6t \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4t & 6t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9t^2 & 6t + 2 \\ 3 + 4t & 6t^2 \end{pmatrix}$$ ok.

21.)

$$A'_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

$$(A^2)'_t = A \cdot A'_t + A'_t \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{t} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

22)

$$(\underline{b}^T A \underline{c})' = \underline{b}^T \cdot (A\underline{c})' + (\underline{b}^T)' A \underline{c} = \underline{b}^T A \cdot \underline{c}' + \underline{b}^T A' \underline{c} + (\underline{b}')^T A \underline{c}$$

$$= \left[(t+1)^2 + 3t \right] + (1\ 2\ 3\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2(t+1) & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + 0$$

$$= (t+1)^2 + 3t + 2(t+1)t + 3t = \underline{\underline{3t^2 + 10t + 1}}$$

23.) $Q = \underline{x}^T A \underline{x}$ $\qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

a) $Q'_{x_1} = (\underline{x}^T A \underline{x})'_{x_1} = (\underline{x}^T)'_{x_1} \cdot A\underline{x} + \underline{x}^T \cdot (A\underline{x})'_{x_1}$

$= (1\ 0\ 0 \ldots 0) \cdot A\underline{x} + \underline{x}^T A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_1}^T A \underline{x} + \underline{x}^T A \underline{e_1}$

b) $\underline{x}^T A \underline{e_1} = (\underline{x}^T A \underline{e_1})^T = \underline{e_1}^T A^T \underline{x}^{TT} = \underline{e_1}^T A^T \underline{x}$

(1x1-matrise er symmetrisk)

Dermed fra a): $Q'_{x_1} = \underline{e_1}^T A \underline{x} + \underline{x}^T A \underline{e_1} = \underline{e_1}^T A \underline{x} + \underline{e_1}^T A^T \underline{x}$

$= \underline{e_1}^T (A + A^T) \underline{x}$

c) $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = Q'_{x_i} = \underline{e_i}^T (A + A^T) \underline{x}$ ← Erstatter $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ med

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← {1 på i'te plass}

i argumentet i b).

d) $\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \partial Q / \partial x_1 \\ \partial Q / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial Q / \partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e_1}^T (A + A^T) \underline{x} \\ \underline{e_2}^T (A + A^T) \underline{x} \\ \vdots \\ \underline{e_n}^T (A + A^T) \underline{x} \end{pmatrix} = (A + A^T) \underline{x} = \underline{\underline{2 A \underline{x}}}$