Oppgaveark 11

Oppgave 1

Finn den deriverte av matrisefunksjonene $A, B, A^T, 3A+2B, A^2$ og AB med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2

Finn den deriverte av matrisefunksjonene A og A^2 med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

Oppgave 3

Finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når f er funksjonen gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + x_2^3$$

Oppgave 4

Skriv den kvadratiske formen f på matriseform og finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$

Oppgave 5

Skriv funksjonen f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ og finn de stasjonære punktene. Er de stasjonære punktene maksimum- eller minimumspunkter?

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 3$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - x_1$

Oppgave 6

La $f(t) = \mathbf{b}^T A\mathbf{c}$, der

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & t \\ 0 & t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn $\frac{\partial f}{\partial t}$ ved hjelp av produktregelen for derivasjon av matriser.

Oppgave 7

I denne oppgaven skal vi bruke regnereglene for derivasjon av matrisefunksjoner til å derivere $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Vi antar at A er en $n \times n$-matrise som kun inneholder konstanter, og setter som vanlig

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

a) Vis at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1$, der $\mathbf{e}_1$ er kolonnevektoren som har 1 på første plass og 0 ellers.

b) Vis at $(\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T A^T\mathbf{x}$ og konkluder at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T(A+A^T)\mathbf{x}$.

c) Forklar at $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i^T(A+A^T)\mathbf{x}$ der $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har 1 på i'te plass og 0 ellers.

d) Vis at $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (A+A^T)\mathbf{x}$.