Løsning: Oppgaveark 5

OPPGAVE 1

Finn den deriverte av matrisefunksjonene $A, B, A^T, 3A+2B, A^2$ og AB med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}A = \begin{pmatrix} 3t^2 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}(A^T) = \begin{pmatrix} 3t^2 & 1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(3A+2B) = \begin{pmatrix} 9t^2 & 6t+2 \\ 3+4t & 6t^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(A^2) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t^6+t^3 & t^5+t^2 \\ t^4+t & t^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t^5+3t^2 & 5t^4+2t \\ 4t^3+1 & 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{Alt:} \quad = \frac{d}{dt}(A)\cdot A + A \cdot \frac{d}{dt}(A) \right)$$

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{d}{dt}(A)\cdot B + A \cdot \frac{d}{dt}(B) = \begin{pmatrix} 3t^2 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 & t^2 \\ t & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3t^2+2t^3+2t^3 & 3t^3+2t^4+t^3+3t^4 \\ 1+2t & t+t+3t^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3t^2+4t^3 & 4t^3+5t^4 \\ 1+2t & 2t+3t^2 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE 2

Finn den deriverte av matrisefunksjonene A og A^2 med hensyn til t når

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}}$$

$$\frac{d}{dt}(A^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Oppgave 3

Finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når f er funksjonen gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + x_2^3$$

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 + 3x_2^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 + 3x_2^2 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE 4

Skriv den kvadratiske formen f på matriseform og finn $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ når

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$

a) $f(\underline{x}) = \underline{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{\begin{pmatrix} 2x_1 + 16x_2 \\ 16x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}}$$

b) $f(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 \\ -2x_3 \end{pmatrix}}$$

OPPGAVE 5

Skriv funksjonen f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ og finn de stasjonære punktene. Er de stasjonære punktene maksimum- eller minimumspunkter?

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 3$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - x_1$

a) $f(\underline{x}) = \underline{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + (3)$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-63} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2 \cdot 63} \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -13/123 \\ -22/123 \end{pmatrix}}} \text{ stasj. pkt.}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 63 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 63}}{2} = 1 \pm 8 = 9, -7$$

Kvadratisk form indefinit

$\Downarrow$

Sadelpkt.

b) $f(\underline{x}) = x^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}} \text{ stasj. pkt.}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

$$\underline{\lambda = -1}, \ \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \underline{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

Kvadratisk form indefinit

$\Downarrow$

Sadelpkt

OPPGAVE 6

La $f(t) = \mathbf{b}^T A\mathbf{c}$, der

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} (t+1)^2 & t \\ 0 & t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn $\frac{\partial f}{\partial t}$ ved hjelp av produktregelen for derivasjon av matriser.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{d}{dt}(b^T A c) = \frac{d}{dt}(b^T A)\underline{c} + b^T A \frac{d}{dt}\underline{c}$$

$$= \frac{d}{dt}(\underline{b}^T) A\underline{c} + \underline{b}^T \frac{d}{dt}(A)\,\underline{c} + \underline{b}^T A \frac{d}{dt}(\underline{c})$$

$$= 0 + (1\ 2\ 3\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2(t+1) & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 3\ 4) \begin{pmatrix} (t+1)^2 & t \\ 0 & t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 2\ 3\ 4) \cdot \left[\begin{pmatrix} 2t(t+1) \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t+1)^2 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (1\ 2\ 3\ 4) \begin{pmatrix} 3t^2 + 4t + 1 \\ 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = 3t^2 + 4t + 1 + 6t = \underline{3t^2 + 10t + 1}$$

OPPGAVE 7

I denne oppgaven skal vi bruke regnereglene for derivasjon av matrisefunksjoner til å derivere $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Vi antar at A er en $n \times n$-matrise som kun inneholder konstanter, og setter som vanlig

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

a) Vis at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1$, der $\mathbf{e}_1$ er kolonnevektoren som har 1 på første plass og 0 ellers.

b) Vis at $(\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T A^T\mathbf{x}$ og konkluder at $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \mathbf{e}_1^T(A+A^T)\mathbf{x}$.

c) Forklar at $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i^T(A+A^T)\mathbf{x}$ der $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har 1 på i'te plass og 0 ellers.

d) Vis at $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (A+A^T)\mathbf{x}$.

a) $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\underline{x}^T A \underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\underline{x}^T) A\underline{x} + \underline{x}^T A \frac{\partial}{\partial x_1}(\underline{x})$

$= \underline{e}_1^T A \underline{x} + \underline{x}^T A \underline{e}_1$, $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_3\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\underline{x})$

b) Siden x^TAe_1 er 1x1-matrise, er $(x^TAe_1)^T = (x^TAe_1)$.
Dermed:

$x^TAe_1 = (x^TAe_1)^T = e_1^T A^T (x^T)^T = e_1^T A^T \underline{x}$

$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \underline{e}_1^T A\underline{x} + \underline{x}^T A\underline{e}_1 = \underline{e}_1^T A\underline{x} + \underline{e}_1^T A^T\underline{x} = \underline{e}_1^T(A+A^T)\underline{x}$

c) $\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{x} = \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \underline{e}_i \Rightarrow$ På tilsvarende måte som a)-b):

$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \underline{e}_i^T(A+A^T)\underline{x}$

d) $\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix}\partial Q/\partial x_1\\ \vdots \\ \partial Q/\partial x_n\end{pmatrix} = (A+A^T)\underline{x}$ siden $\underline{e}_i^T(A+A^T)\underline{x}$ gir komponent i fra vektoren $(A+A^T)\underline{x}$