Løsning : Oppgaveark 4

OPPGAVE 1

Finn egenverdiene til A, og bruk dem til å finne $\det(A)$ og $\mathrm{tr}(A)$ i hvert tilfelle:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

$\underline{\lambda=-1,\ \lambda=-2,\ \lambda=-1}$

$|A| = (-1)(-2)(-1) = \underline{-2}$

$tr(A) = -1-2-1 = \underline{-4}$

b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-1\cdot 1 = \lambda^2-3\lambda+1 = 0$

$\lambda = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \underline{\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$|A| = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9-5}{4} = \underline{1}$

$tr(A) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = \underline{3}$

c) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+14) = 0$

$\underline{\lambda=4},\ \lambda = \frac{8\pm\sqrt{8}}{2} = \underline{4\pm\sqrt{2}}$

$|A| = 4\cdot(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2}) = 4\cdot(16-2) = \underline{56}$

$tr(A) = 4+(4+\sqrt{2})+(4-\sqrt{2}) = \underline{12}$

OPPGAVE 2

Finn alle egenvektorene til matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Egenverdier : $\lambda = -1$, $\lambda = -2$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \qquad \begin{matrix} 0 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = s & \text{fri} \\ x_2 = 0 & \\ x_3 = t & \text{fri} \end{matrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ to frihetsgrader

egenvektorer for $\lambda = -1$

$\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 & \\ x_2 = t & \text{fri} \\ x_3 = 0 & \end{matrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ en frihetsgrad

egenvektor for $\lambda = -2$

OPPGAVE 3

Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finn alle egenvektorene til A når $s = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & -2 \\ 0 & s-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (s-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (s-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = (s-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Egenverdier: $\underline{\underline{\lambda = s,\ \lambda = 2,\ \lambda = 3}}$

$\underline{s=2}$:

Egenverdier: $\underbrace{\lambda = 2, \lambda = 2}_{\text{mult. } 2}, \lambda = 3$

Egenvektorer:

$\underline{\lambda=2}$: $\begin{pmatrix} 1-2 & 7 & -2 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 4-2 \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0}$

$-x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \quad (1)$

$0 = 0$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \quad (2)$

(1) + (2): $8x_2 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$

(1) − 7(2): $-8x_1 + 12x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_3$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3/2\, t \\ 1/2\, t \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{t\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$, $x_3 = t$ fri (en frihetsgrad)

$\underline{\lambda=3}$: $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0}$

$-2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0$

$-x_2 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 = -x_3$

$x_2 = 0$

ok.

x_3 fri

$\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

$x_3 = t$ fri (en frihetsgrad)

OPPGAVE 4

Finn alle egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 17 & 89 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En matrise som er null under diagonalen (slik som A) kalles *øvre triangular*. Hva kan du si om egenverdiene til en triangulær matrise?

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 17 & 89 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda = 7,\ \lambda = 3,\ \lambda = 1,\ \lambda = -2}}$$

For en ~~ove~~ triangulær matrise, er egenverdiene lik tallene på diagonalen.

Oppgave 5

Avgjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definit eller negativ (semi)definit i hvert tilfelle:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Egenverdier: $-1, -2, -1 \Rightarrow$ negativ definit

b) Egenverdier: $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow$ positiv definit

c) Egenverdier: $4, 4+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ positiv definit

Oppgave 6

Klassifiser de kvadratiske formene som positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit:

a) $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_3^2$

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1/4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1/2$

$\Rightarrow$ indefinit

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5) = 0 \quad \lambda = 3, \lambda = \pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ indefinit

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1/2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1/4) = 0 \quad \lambda = -1, \lambda = \pm 1/2$

$\Rightarrow$ indefinit

Oppgave 7

La A være en symmetrisk 2×2-matrise.

a) Vis at A er positiv definit hvis og bare hvis $\det(A) > 0$ og $\operatorname{tr}(A) > 0$.

b) Vis at A er indefinit hvis og bare hvis $\det(A) < 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad |A| = ad - b^2, \quad \operatorname{tr} A = a + d$$

a) Hvis A har egenverdier λ_1, λ_2, så er $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

$$A \text{ positiv definit}$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$
$$(|A| > 0, \ \operatorname{tr} A > 0)$$

b)

$$A \text{ indefinit}$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \quad \text{eller} \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$$
$$(\det A < 0)$$

OPPGAVE 8

La A være en (ikke nødvendigvis kvadratisk) matrise, og la $B = A^T A$. Vis at B er en kvadratisk, symmetrisk og positiv semidefinit matrise. Vis også at hvis A er en kvadratisk invertibel matrise, så er B positiv definit.

A $m \times n$ $\Rightarrow$ $B = A^T \cdot A$ $n \times n$-matrise
(A^T $n \times m$) (kvadratisk)

i) B er symmetrisk:

$B^T = (A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A = B$

$\Rightarrow$ B symmetrisk

ii) B positiv semidefinit:

B positiv semidefinit betyr $\underline{x}^T \cdot B \cdot \underline{x} \geq 0$ for alle $\underline{x}$.
Må altså vise: $\underline{x}^T B \underline{x} \geq 0$ for alle $\underline{x}$.

$\underline{x}^T B \underline{x} = \underline{x}^T \cdot (A^T A) \underline{x} = (\underline{x}^T A^T)(A\underline{x}) = (A\underline{x})^T \cdot (A\underline{x})$

Siden $A\underline{x}$ er vektor, sett $A\underline{x} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$. Da har vi:

$\underline{x}^T B \underline{x} = (A\underline{x})^T (A\underline{x}) = (h_1 \, h_2 \cdots h_m) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_m^2 \geq 0.$

Dermed har vi bevist $\underline{x}^T B \underline{x} \geq 0$.

iii) Hvis A er kvadratisk og invertibel, så er B positiv defn.

A invertibel $\Rightarrow$ $\det(A) \neq 0$
$\det(B) = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) \neq 0$
$\det(B) \neq 0$ $\Rightarrow$ ingen av egenverdiene til B er null.
Siden B er positiv semidefinit, er B positiv definit.