Oppgaveark 3

Oppgave 1

Skriv ned et uttrykk for funksjonen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ i hvert tilfelle:

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Oppgave 2

Finn i hvert tilfelle den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

Oppgave 3

Klassifiser de kvadratiske formene som positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt:

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2$
3. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - x_2^2$
4. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$

Oppgave 4

Gjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ til en kvadratisk form i de nye variablene u og v ved å gjøre variabelskiftet $u = x_1 + x_2$ og $v = x_1 - x_2$. Er Q positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt?

Oppgave 5

Undersøk om det homogene likningssystemet har ikke-trivielle løsninger:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \end{array}$$

Oppgave 6

Finn alle løsninger av det homogene likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Hvor mange frihetsgrader har dette likningssystemet?

Oppgave 7

Vi betrakter det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der A er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

og s er en parameter. For hvilke verdier av s har dette likningssystemet ikke-trivielle løsninger? Finn eventuelt antall frihetsgrader i hvert tilfelle.