Løsninger: Oppgaveark 3

OPPGAVE 1

Skriv ned et uttrykk for funksjonen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ i hvert tilfelle:

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) $Q(\underline{x}) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$

b) $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

c) $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$

OPPGAVE 2

Finn i hvert tilfelle den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 3

Klassifiser de kvadratiske formene som positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt:

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2$
3. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - x_2^2$
4. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$

a) positiv (semi) definit: $\begin{cases} Q(\underline{x}) \geq 0 \\ (Q(\underline{x}) > 0 \ , \ \underline{x} \neq \underline{0}) \end{cases}$

b) negativ (semi) definit: $\begin{cases} Q(\underline{x}) \leq 0 \\ (Q(x) < 0, \ \underline{x} \neq \underline{0}) \end{cases}$

c) indefinit: $\begin{cases} Q(1,0) = 3 > 0 \\ Q(0,1) = -1 < 0 \end{cases}$

d) indefinit: $\begin{cases} Q(1,0,0) = 3 > 0 \\ Q(1,1,0) = -1 < 0 \end{cases}$

Oppgave 4

Gjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ til en kvadratisk form i de nye variablene u og v ved å gjøre variabelskiftet $u = x_1 + x_2$ og $v = x_1 - x_2$. Er Q positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt?

$\begin{cases} u = x_1 + x_2 \\ v = x_1 - x_2 \end{cases}$

Løser for x_1 og x_2:

$u + v = 2x_1 + 0 \Rightarrow x_1 = \frac{u+v}{2}$

$u - v = 0 + 2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{u-v}{2}$

$$Q = 4x_1x_2 = 4 \cdot \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2}$$

$$= (u+v)(u-v) = u^2 - v^2$$

$\underline{Q(u,v) = u^2 - v^2}$

$\underline{Q \text{ er indefinit}}$ $\begin{cases} Q(u=1, v=0) = 1 > 0 \\ Q(u=0, v=1) = -1 < 0 \end{cases}$

Oppgave 5

Undersøk om det homogene likningssystemet har ikke-trivielle løsninger:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1\cdot(-3) - 2\cdot 1 = -3-2 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow A^{-1}$ eksisterer $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kun triviell løsning

Oppgave 6

Finn alle løsninger av det homogene likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hvor mange frihetsgrader har dette likningssystemet?

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

(2) $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

Fjerner x_1 fra (2):

(2) $-2\cdot$(1): $0x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$

(2)' $-x_2 - 4x_3 = 0$

Fjerner x_2 fra (1):

(1) $-$ (2): $-x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0$

(1)' $-x_1 + 3x_3 = 0$

Nytt system: (1)': $-x_1 + 3x_3 = 0$

(2)': $-x_2 - 4x_3 = 0$

$x_1 = 3x_3$

$x_2 = -4x_3$

x_3 fri

x_1, x_2 gitt vha x_3 $\Big\}$ En frihetsgrad

Sett $x_3 = t$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ -4x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -4t \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{alle løsninger}$$

OPPGAVE 7

Vi betrakter det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der A er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

og s er en parameter. For hvilke verdier av s har dette likningssystemet ikke-trivielle løsninger? Finn eventuelt antall frihetsgrader i hvert tilfelle.

$$|A| = s \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = s \cdot 6 = \underline{6s}$$

<u>To tilfeller:</u>

$s=0$: $|A| = 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ <u>ikke-trivielle løsn.</u>

$s \neq 0$: $|A| = 6s \neq 0 \Rightarrow$ <u>kun triviell løsn</u>

$(A \cdot \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0})$

<u>Antall frihetsgrader for $s=0$:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

I $x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0$

~~$0 = 0$~~ (kan strykes)

II $x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$

<u>Løser for x_1 og x_2:</u>

I−II: $6x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = x_3}$

I−7II: $-6x_1 - 30x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -5x_3}$

x_3 fri

x_1, x_2 gitt ved x_3

<u>én frihetsgrad</u>