Oppgave 1

Avgjør i hvert tilfelle om funksjonen er konveks, konkav, begge deler eller ingen av delene:

a) $f(x, y) = x + y$

b) $f(x, y) = 3x - y$

c) $f(x, y) = e^x + e^y$

d) $f(x, y) = e^{-x-y}$

e) $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$

Oppgave 2

Vis at funksjonen $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + e^y - y$ er konveks.

Oppgave 3

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\min \int_0^1 (t\dot{y} + \dot{y}^2)\,\mathrm{d}t, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0$$

a) Finn Euler-likningen og løs den. Vis at løsningen gir et minimum.

b) Finn den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.

Oppgave 4

Finn Euler-likningen som er tilordnet integralet

$$\min \int_{t_0}^{t_1} F(t, y, \dot{y})\,\mathrm{d}t$$

i hvert tilfelle:

a) $F(t, y, \dot{y}) = 2ty + 3y\dot{y} + t\dot{y}^2$

b) $F(t, y, \dot{y}) = -e^{\dot{y} - ay}$

c) $F(t, y, \dot{y}) = ((y - \dot{y})^2 + y^2)e^{-at}$

Oppgave 5

Vis at Euler-likningen som svarer til variasjonsproblemet

$$\min \int_a^b (x^2 + tx\dot{x} + t^2\dot{x}^2)\,\mathrm{d}t$$

er gitt ved $t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} - \frac{1}{2}x = 0$.

Oppgave 6

a) Løs differensiallikningen $\ddot{y} + \dfrac{1}{t}\dot{y} = 1$.

b) Finn Euler-likninen som svarer til variasjonsproblemet

$$\min \int_1^2 (2ty + 3y\dot{y} + t\dot{y}^2)\,\mathrm{d}t, \quad y(1) = 0,\ y(2) = 1$$

og bestem løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.

Oppgave 7

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max \int_0^T e^{-t/4} \ln(2K - \dot{K})\,\mathrm{d}t, \quad K(0) = K_0,\ K(T) = K_T$$

a) Vis at funksjonen $F(t, K, \dot{K}) = e^{-t/4} \ln(2K - \dot{K})$ er konkav som funksjon i $(K, \dot{K})$.

b) Vis at Euler-likningen kan skrives på formen $a\ddot{K} + b\dot{K} + cK = 0$ der a, b, c er konstanter.

c) Løs variasjonsproblemet.