Løsninger: Oppgaveark 2.

Oppgave 1

Regn ut vektorene $3\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ og $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ når

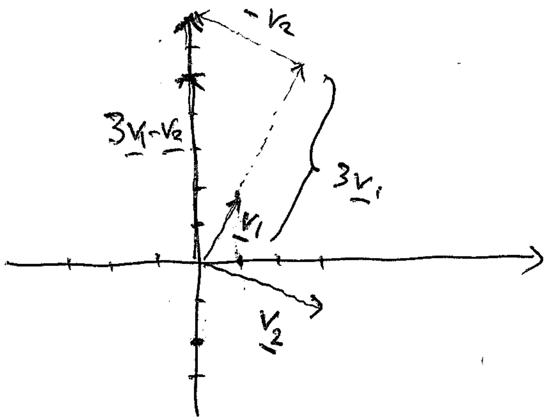
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

Skisser også vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ i samme koordinatsystem.

$$3\underline{v}_1 = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$-\underline{v}_2 = -\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

$$3\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}.$$



Oppgave 2

Avgjør i hvert tilfelle om $\mathbf{a}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

1. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

2. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ JA

2. $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ JA

3. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = c_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c_2\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix} + c_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ NEI.

Ikke mulig siden likningen i andre komponent blir

$$1 = 0$$

Oppgave 3

Avgjør i hvert tilfelle om vektorene er lineært avhengige eller uavhengige.

1. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$
2. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$
3. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
4. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

1. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot 1 \neq 0 \Rightarrow$ lineært uavhengige

2. $\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = -5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$ lineært avhengige

3. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$ lineært avhengige

4. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 1 \neq 0 \Rightarrow$ lineært uavhengige

Oppgave 4

Bestem de verdiene av h slik at vektorene er lineært uavhengige.

1. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\h\end{pmatrix}$
2. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\-5\\7\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\h\end{pmatrix}$

1. $\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\3 & -4 & 1\\-3 & 1 & h\end{vmatrix} = 1\cdot(-4h-1) - 3(-2h+1)$

$-3(-2-4) = -4h-1+6h-3+18 = 2h+14$

$h=-7$: $|\cdots| = 0 \Rightarrow$ lineært avhengige

$h\neq-7$: $|\cdots| \neq 0 \Leftrightarrow$ lineært uavhengige

2. $\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\1 & -5 & 0\\-2 & 7 & h\end{vmatrix} = -2(h)+2(7-10) = -2h-6$

$h=-3$: $|\cdots| = 0 \Leftrightarrow$ lin. avhengige

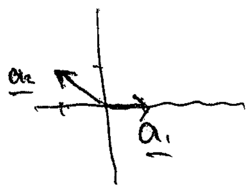
$h\neq-3$: $|\cdots| \neq 0 \Leftrightarrow$ lin. uavhengige

Oppgave 5

Skisser i hvert tilfelle vektorene i et koordinatsystem, og avgjør om vektorene er lineært avhengige eller uavhengige.

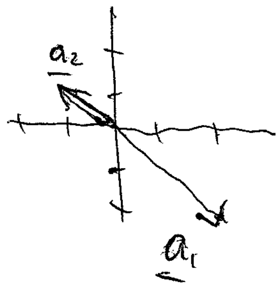
1. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.



ikke langs samme linje → lin. uavhengige

2.



langs samme linje → $a_1 = -2a_2$ → lineært avhengige

Oppgave 6

Avgjør hvilke av følgende påstander som er sanne og hvilke som er gale. Begrunn svarene.

1. Hvis kolonnene i en matrise A er lineært uavhengige, så er A inverterbar.
2. Hvis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{a}_1$ en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.
3. Gå ut ifra at $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige, og anta at $\mathbf{a}_1$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ lineært avhengige.
4. Gå ut ifra at $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er vektorer i $\mathbb{R}^4$, og at ikke $\mathbf{a}_1$ kan skrives som $c \cdot \mathbf{a}_2$ for noe tall c. Da er $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ lineært avhengige.

1. SANN hvis A er kvadratisk
   USANN ellers (dvs generelt)

2. USANN; ~~[illegible]~~

3. SANN; $a_1 = r \cdot a_2 + s a_3$
   $\Downarrow$
   $-1 \cdot a_1 + r a_2 + s a_3 = 0$

4. USANN; f.eks. $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

OPPGAVE 7

Gå ut ifra at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ og $\mathbf{a}_4$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Vis at da er også $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ lineært uavhengige.

Vi skal vise at $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lin. uavhengig, og ser på likningen

$$c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 = \underline{0}$$

Vi kan skrives dette som

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 + 0 \cdot \underline{a}_4 = \underline{0}$$

(altså er $c_4 = 0$)

og siden $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ er lin. uavhengig, må den eneste løsn. være

$c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $0 = 0$

Dermed er $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ lin. uavh.

OPPGAVE 8

Skriv det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

som en matriselikning og som en vektorlikning.

Matriseform: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorform: $x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$