Løsn: Oppgaveark 18

OPPGAVE 1

Følgende differentiallikninger kan løses ved å integrere høyre side. Finn den generelle løsningen i hvert tilfelle, og finn også den partikulære løsningen som tilfredstiller $y(0) = 1$.

a) $y' = 2t$

b) $y' = e^{2t}$

c) $y' = (2t+1)e^{t^2+t}$

a) $y' = 2t$

$y = \int 2t\, dt = \underline{\underline{t^2 + C}}$

$y(0)=1$: $t=0$; $y=1$

$1 = 0^2 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = \underline{\underline{t^2+1}}$

b) $y' = e^{2t}$

$y = \int e^{2t} dt = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2t} + C}}$

$y(0)=1$: $t=0$, $y=1$

$1 = \frac{1}{2}e^0 + C = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 1/2$

$\Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}}}$

c) $y' = (2t+1)e^{t^2+t}$

$y = \int (2t+1) e^{t^2+t} dt$

$= \int e^u \cdot du = e^u + C$

$= \underline{\underline{e^{t^2+t} + C}}$

Substitusjon:

$u = t^2 + t$

$u' = 2t + 1$

$du = u' dt$

$= (2t+1) dt$

$y(0)=1$: $t=0$, $y=1$

$1 = e^0 + C = 1 + C \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$y = \underline{\underline{e^{t^2+t}}}$

Oppgave 2

Vis at $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ er en løsning av $y' + y = e^t$.

Diff. likning: $y' + y = e^t$

Prøv $y = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$:

$$\left.\begin{aligned} \text{VS: } y' + y &= (Ce^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t)' + (Ce^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t) \\ &= -Ce^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t + Ce^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t = \underline{e^t} \\ \text{HS: } &\underline{e^t} \end{aligned}\right\} \text{ ok.}$$

Konkl: $y = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ er en løsning.

OPPGAVE 3

Løs differensiallikningen $y^2y' = t+1$. Finn løsningen som tilfredsstiller $y(1) = 1$.

$$y^2 y' = t+1 \qquad \frac{1}{y^2} \qquad t+1$$

$$y' = \frac{1}{y^2}\cdot(t+1) = f(y)\cdot g(t) \qquad \text{seperabel}$$

$$y^2 \cdot y' = t+1$$

$$\int y^2 \underbrace{y'\,dt}_{dy} = \int (t+1)\,dt$$

$$\int y^2\,dy = \int (t+1)\,dt$$

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}t^2 + t + C$$

$$y^3 = \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t + 3C}$$

generell løsn.

$y(1)=1$: $t=1, y=1$

$$\frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 + C$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 1 + C$$

$$C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{2-3-6}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2}}$$

part. løsn.

Oppgave 4

Løs følgende differensiallikninger:

a) $y' = t^3 - t$

b) $y' = te^t - 1$

c) $e^y y' = t + 1$

a) $y' = t^3 - t \qquad y = \int t^3 - t \, dt = \underline{\tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{2}t^2 + C}$

b) $y' = te^t - 1 \qquad y = \int te^t - 1 \, dt = te^t - e^t - t + C$

delvis int.

$\cancel{\int te^t dt = uv - \int u'v \, dt = \tfrac{1}{2}t^2 e^t}$

$\cancel{u = \tfrac{1}{2}t^2 \quad v = e^t}$

$\int te^t dt = \int u' \cdot v \, dt = uv - \int uv' \, dt$

$u' = e^t \quad u = e^t$

$v = t \quad v' = 1$

$= te^t - \int e^t \cdot 1 \, dt = te^t - e^t + C$

$y = \underline{\underline{te^t - e^t - t + C}}$

c) $e^y \cdot y' = t + 1$ (separabel)

$\int e^y dy = \int e^y y' dt = \int (t+1) dt$

$e^y = \tfrac{1}{2}t^2 + t + C$

$y = \underline{\underline{\ln\left(\tfrac{1}{2}t^2 + t + C\right)}}$

Oppgave 5

Løs følgende differensiallikninger. Her er $y = f(x)$ en funksjon av x, og ikke t som i tidligere oppgaver.

a) $y' = \frac{x}{y}$

b) $y' = e^{x-y}$

c) $x^2 y' = 2$

a) $y' = \frac{x}{y}$ seperabel

$y \cdot y' = x$

$\int y\,dy = \int y \cdot \underbrace{y'\,dx}_{dy} = \int x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y^2 = x^2 + 2C$

$\Rightarrow y = \underline{\underline{\sqrt{x^2 + 2C}}}$

b) $y' = e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ seperabel

$e^y y' = e^x \qquad \int e^y y'\,dx = \int e^y\,dy = \int e^x\,dx$

$e^y = e^x + C$

$y = \underline{\underline{\ln(e^x + C)}}$

c) $x^2 y' = 2$

$y' = \frac{2}{x^2}$ (seperabel)

$y = \int \frac{2}{x^2}\,dx = \underline{\underline{-\frac{2}{x} + C}}$