OPPGAVE 1

Finn Taylor-polynomet $P_2(x)$ av grad 2 om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Tegn grafen til f og P_2 i samme koordinatsystem.

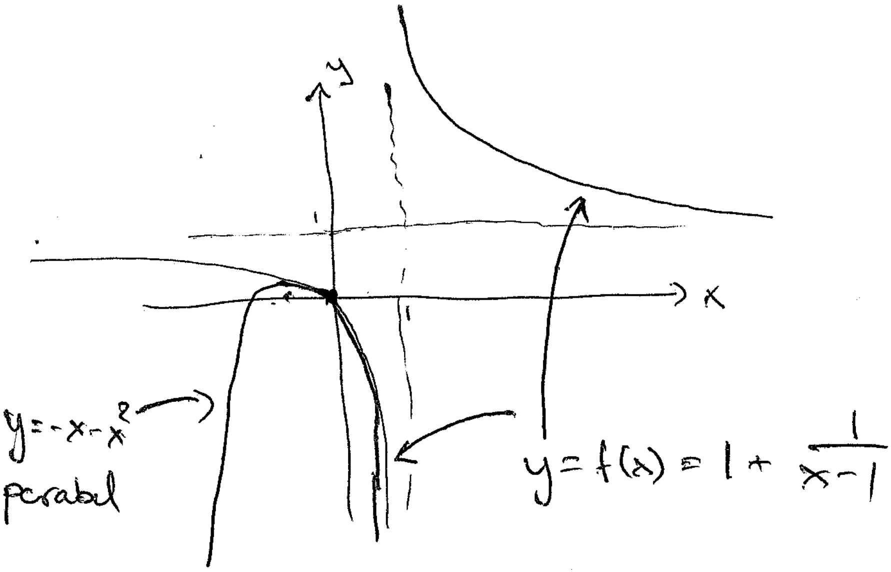
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = -(x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = -(-2)(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x-1)^3} \qquad f''(0) = -2$$

$$P_2(x) = 0 - 1 \cdot x + \frac{(-2)}{2}x^2$$

$$= \underline{-x - x^2}$$



OPPGAVE 2

Finn en polynomfunksjon f av grad 3 slik at $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 3$ og $f^{(3)}(0) = f'''(0) = 8$. Finn også Taylorpolynomet til funksjonen $f(x)$ av grad 2 om $x = 0$?

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad f(0) = a_0 = 1$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \qquad f'(0) = a_1 = -1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6 \cdot a_3 x \qquad f''(0) = 2a_2 = 3$$

$$f'''(x) = 6a_3 \qquad f'''(0) = 6a_3 = 8$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underline{1 - x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3}$$

$$P_2 = \underline{1 - x + \frac{3}{2}x^2} \quad \text{siden} \quad \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \\ f''(0) = 3 \end{cases}$$

OPPGAVE 3

Finn Taylorpolynomet $P_3(x)$ av grad 3 om $x = 1$ til funksjonen

$$f(x) = \ln(x)$$

og bruk dette til å regne ut en tilnærmingsverdi for $\ln(2)$. Hvor stor blir feilen i denne tilnærmingen?

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = 2$$

$$P_3(x) = 1(x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$\ln(2) = f(2) \simeq P_3(2) = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \simeq 0.833$$

$\ln(2) \simeq 0.693$ (fra kalkulator)

Feil: $R_4(2) = f(2) - P_3(2) \cong -0.140$

Estimat for feil vha feil-leddet $R_{n+1}(x)$:

$$R_4(2) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(2-1)^4 = \frac{-6/c^4}{4!}\cdot 1^4 = -\frac{1}{4c^4}$$

$$|R_4(2)| = \frac{1}{4c^4} \leq \frac{1}{4\cdot 1^4} = \frac{1}{4} = 0.25$$ siden c er mellom 1 og 2 iflg. feilledds-formelen

Bruker at:

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2\cdot(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

OPPGAVE 4

Finn Taylor-rekken til funksjonen f om $x = 0$ når

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

For hvilke verdier av x er denne rekken konvergent? Sjekk at rekken konvergerer mot $f(x)$ i disse tilfellene.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot (x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2)(-3) \cdot (x+1)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-(n+1)}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

$$f'''(0) = -6$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n!$$

Taylor-rekken:

$$1 - 1 \cdot x + \frac{2 \cdot x^2}{2} - \frac{6}{6} x^3 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} x^n + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Konvergens: Geometrisk rekke med koeff. $k = -x$

$|k| = |x| < 1$: Rekken konvergerer mot $\frac{1}{1-k} = \frac{1}{1+x} = f(x)$

$|k| = |x| \geq 1$: Rekken divergerer

OPPGAVE 5

i $x=0$

Regn ut Taylor-rekken til eksponensialfunksjonen $f(x) = e^x$ og vis at denne funksjonen er analytisk. Hint: For en gitt x, så er f analytisk i x hvis og bare hvis

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Taylor-rekke:

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) \iff \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - P_n(x)\right) = 0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

Regner ut feil-leddet $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$, der c er mellom 0 og x

For en gitt x, så har vi

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

siden $(n+1)!$ vokser raskere enn $e^c x^{n+1}$ for en gitt x.