OPPGAVE 1

La X, Y, Z være stokastiske variable og la c være en konstant. Vis at

a) $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$

b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$

c) $\mathrm{Cov}(cX, Y) = c\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

d) $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$

Bruker $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$:

a) $\mathrm{Cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mathrm{Var}(X)$

b) $\mathrm{Cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$= E(YX) - E(Y)E(X) = \mathrm{cov}(Y,X)$

c) $\mathrm{Cov}(cX,Y) = E[cX \cdot Y] - E(cX)E(Y)$
$= c\,E(XY) - c\,E(X)E(Y) = c\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big)$
$= c \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$

d) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2, Y) = E\big((X_1+X_2)Y\big) - E(X_1+X_2)E(Y)$
$= E[X_1Y + X_2Y] - \big(E(X_1) + E(X_2)\big)E(Y)$
$= E[X_1Y] + E[X_2Y] - E(X_1)E(Y) - E(X_2)E(Y)$
$= E(X_1Y) - E(X_1)E(Y) + E(X_2Y) - E(X_2)E(Y)$
$= \mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mathrm{Cov}(X_2,Y)$

OPPGAVE 2

La X_1, X_2 være stokastiske variable. Vi definerer forventningsvektoren μ og kovariansmatrisen $\mathbf{\Sigma}$ ved

$$\mu = \begin{pmatrix} E[X_1] & E[X_2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2, X_2) \end{pmatrix}$$

La $Y = a_1X_1 + a_2X_2$, der a_1, a_2 er konstanter. Vis at $E[Y] = \mu \cdot \mathbf{a}$ og at $\mathrm{Var}[Y] = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{a}$.

$$E(Y) = E(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2)$$

$$= \begin{pmatrix} E(X_1) & E(X_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \underline{\mu} \cdot \underline{a}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a_1X_1 + a_2X_2) = \mathrm{Cov}(a_1X_1 + a_2X_2, a_1X_1 + a_2X_2)$$

$$= \mathrm{Var}(a_1X_1) + a_2a_1\mathrm{Cov}(X_2, X_1) + a_1a_2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Var}(a_2X_2)$$

$$= a_1^2\mathrm{Var}(X_1) + a_2a_1\mathrm{Cov}(X_2, X_1) + a_1a_2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + a_2^2\mathrm{Var}(X_2)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{a}^T \cdot \Sigma \cdot \underline{a}$$

OPPGAVE 3

La $\mathbf{X} = (X_1 \quad X_2 \quad X_3)^T$, og anta at forventningsvektoren μ og kovariansmatrisen σ er gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La $Y = 5X_1 - X_2 + 2X_3$. Finn $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.

$$E(Y) = (5 \quad -1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 + 2 + 6 = \underline{\underline{28}}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = (5 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 5^2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 5$$

$$= 50 - 20 + 40 + 3 - 4 + 20 = \underline{\underline{89}}$$

Oppgave 4

La X_1 og X_2 være stokastiske variable med henholdsvis forventingsverdier og kovariansmatrise gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Hvis mulig, bestem a_1 og a_2 slik at $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ har minst mulig varians $\mathrm{Var}[Y]$ og samtidig slik at $E[Y] = 6$.

$$E(Y) = (a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 4a_1 + 2a_2 = 6$$

$$\mathrm{Var}(Y) = a_1^2 + 4a_1a_2 + 7a_2^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{Min} \{ a_1^2 + 4a_1a_2 + 7a_2^2 \mid 4a_1 + 2a_2 = 6 \}$$

optimerings-problem.

$$4a_1 + 2a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = \frac{6-4a_1}{2} = 3 - 2a_1$$

$$f = a_1^2 + 4a_1a_2 + 7a_2^2 = a_1^2 + 4a_1(3-2a_1) + 7(3-2a_1)^2$$

$$= a_1^2 + 12a_1 - 8a_1^2 + 63 - 84a_1 + 28a_1^2$$

$$= 21a_1^2 - 72a_1 + 63$$

(parabel $\Rightarrow$ stas. pkt er $\underline{\text{min}}$.)

$$f'_{a_1} = 42a_1 - 72 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{72}{42} = \underline{\frac{12}{7}}$$

$$a_2 = 3 - 2 \cdot \frac{12}{7} = \frac{21-24}{7} = \underline{-\frac{3}{7}}$$

$$\underline{Y = \frac{12}{7}X_1 - \frac{3}{7}X_2}$$

OPPGAVE 5

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige stokastiske variable med samme sannsynlighetsfordeling, og la $\mu = E[X_i]$ og $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi definerer *(empirisk) gjennomsnitt* $\overline{X}$ ved

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Vis at $E[\overline{X}] = \mu$ og at $\text{Var}[\overline{X}] = \sigma^2/n$.

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + \ldots + E(X_n)}{n} = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Cov(X_1 + \ldots + X_n, X_1 + \ldots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n \cdot \sigma^2 + 0\right) = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

OPPGAVE 6

I en populasjon er det følgende inntekter:

$$x_1 = 160, \quad x_2 = 160, \quad x_3 = 160, \quad x_4 = 170,$$
$$x_5 = 170, \quad x_6 = 180, \quad x_7 = 180, \quad x_8 = 180,$$
$$x_9 = 180, \quad x_{10} = 180, \quad x_{11} = 190, \quad x_{12} = 200$$

Beregn populasjonsgjennomsnittet μ og populasjonsvariansen σ^2, gitt ved

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \mu)^2$$

La X være den stokastiske variabelen som framkommer ved å trekke en tilfeldig inntekt fra populasjonen. Hvilke verdier kan X ha? Finn sannsynlighetstettheten til X, og beregn $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.

$$\mu = \bar{x} = \frac{1055}{6} \approx \underline{175.83}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \mu)^2 \approx \frac{1}{12}\left[(160-175.83)^2 + \ldots + (200-175.83)^2\right]$$

$$\approx \underline{140.97}$$

Mulige verdier for X: 160, 170, 180, 190, 200

$p(X=160) = \frac{3}{12}$ $\quad p(X=170) = \frac{2}{12}$ $\quad p(X=180) = \frac{5}{12}$,

$p(X=190) = \frac{1}{12}$ $\quad p(X=200) = \frac{1}{12}$

$$E(X) = 160 \cdot \frac{3}{12} + 170 \cdot \frac{2}{12} + 180 \cdot \frac{5}{12} + 190 \cdot \frac{1}{12} + 200 \cdot \frac{1}{12} = \frac{\Sigma x_i}{12} = \mu \approx \underline{175.83}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = (160-\mu)^2 \cdot \frac{3}{12} + (170-\mu)^2 \cdot \frac{2}{12} + (180-\mu)^2 \cdot \frac{5}{12}$$
$$+ (190-\mu)^2 \cdot \frac{1}{12} + (200-\mu)^2 \cdot \frac{1}{12} = \sigma^2 \approx \underline{140.97}$$