Løsninger: Oppgaveark I.

OPPGAVE 1

Regn ut $A+B$ og $3A+2B$ når

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 7 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 7\\ 19 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

OPPGAVE 2

Finn $-2A$ og $B-2A$ når

$$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -1\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$-2A=\begin{pmatrix}-14 & 0 & 2\\ 2 & -10 & -4\end{pmatrix}$$

$$B-2A=\begin{pmatrix}-15 & 4 & 3\\ 7 & -13 & -4\end{pmatrix}$$

Oppgave 3

Løs matriselikningen $2A + 3X = I$ for X når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3X = I$$

$$3X = I - 2A$$

$$X = \frac{1}{3}(I - 2A)$$

$$= \frac{1}{3}I - \frac{2}{3}A$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4

Regn ut uttrykkene AB, BA, BC, CB dersom de er definert når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

AB ikke definert

$$BA = \begin{pmatrix} 21 & -2 & 11 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5

Beregn AB og BA, hvis de eksisterer, når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

AB ikke definert

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6

Beregn A^2 og A^3 når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7

Dersom A er en 3×5-matrise og produktet AB er en 3×7-matrise, hva er da størrelsen til matrisen B?

$$\begin{array}{ccc} A & B & \longrightarrow AB \\ 3\times 5 & 5\times 7 & 3\times 7 \end{array}$$

Oppgave 8

Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling langs i) første rad ii) andre kolonne:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

i) $3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \cancel{*} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot (-3-10) + 4(10) = -39+40 = \underline{1}$

ii) $-0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3(-3) - 5(-2) = \underline{1}$

Oppgave 9

Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling langs i) første rad ii) andre kolonne:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

i) $2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(-9) + 4(-5) + 3(11) = -18 - 20$

$+ 33 = \underline{-5}$

ii) $-(-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4(-5) + 1(-5) - 4(-5) = \underline{-5}$

Oppgave 10

Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(1\cdot 2 - 0)$

$= 3\cdot 2\cdot 2 = \underline{12}$

Oppgave 11

Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{4} & \cancel{-8} \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \cdot \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -6 \left(4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \right) = \underline{6}$$

Oppgave 12

Regn ut $|A^2|$ når

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = |A| \cdot |A| = (-6)^2 = \underline{36}$$

fra forrige oppgave

Oppgave 13

Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= s \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = s(4-(-2)) = \underline{6s}$$

Oppgave 14

Vi betrakter matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Regn ut A^2.
2. For en bestemt verdi av x er $A^2 = A$. Finn denne verdien.
3. Vis at A ikke er invertible når $A^2 = A$.

1. $$A^2 = \begin{pmatrix} 4-x-4 & 2x+3x+8 & -8+4x+12 \\ -2-3+4 & -x+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & x-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x & 5x+8 & 4+4x \\ -1 & 1-x & 4 \\ 1 & x & -3 \end{pmatrix}$$

2. $A^2 = A$ $$\begin{pmatrix} 2 & x & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 5x-8 & 4+4x \\ -1 & 1-x & 4 \\ 1 & x & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x = -2}$$

3. $$A^2 = A \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hvis A er invertibel, så har vi

$A^2 = A$ $\quad A^{-1}A^2 = A^{-1}A$ $\quad A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dette er ikke tilfellet, så A er ikke invertibel.

Oppgave 15

Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -24 + 25 = 1$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}}$$

Oppgave 16

Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 4) = 1$$

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{22} = + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \operatorname{adj}(A) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Oppgave 17

Vi antar at A og B er invertible $n \times n$-matriser og at $r \neq 0$. Vis at

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$

1. La $C = B^{-1}A^{-1}$. Da har vi

$$(AB)\cdot C = AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$C \cdot (AB) = B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}B = I$$

Dermed er $C = (AB)^{-1}$, dvs

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

2. La $C = \frac{1}{r}A^{-1}$. Da har vi:

$$(rA)\cdot C = rA \cdot \frac{1}{r}A^{-1} = r \cdot \frac{1}{r} \cdot A \cdot A^{-1} = I$$

$$C \cdot rA = \frac{1}{r}A^{-1} \cdot rA = \frac{1}{r} \cdot r\, A^{-1}A = I$$

Dermed er $C = (rA)^{-1}$, dvs

$$\frac{1}{r}A^{-1} = (rA)^{-1}!$$

Oppgave 18

Regn ut $B^T((AB)^{-1}(3A))^T$ når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 61 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 12 & 213 & -2 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T\left((AB)^{-1}(3A)\right)^T$$

$$= B^T\left(B^{-1}A^{-1} \cdot 3A\right)^T = 3B^T(B^{-1}A^{-1}A)^T$$

$$= 3B^T(B^{-1})^T = 3(B^{-1}B)^T = 3I^T = 3I$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$