Harald Bjørnestad:

Variasjonsregning
en enkel innføring.

Tidligere har vi løst oppgaven med å finne ekstremalverdiene (maks./min. verdiene) av en gitt funksjon $f(x)$ når denne funksjonen oppfyller bestemte krav. Vi har også løst det tilsvarende problemet for funksjoner av flere variable. I alle disse oppgavene var det *gitt* en funksjon, og vi søkte etter det *punktet* som ga funksjonen ekstremalverdi.

I variasjonsregning er det ekstremalproblem av en helt annen type vi skal løse. Vi skal bestemme en *ukjent funksjon* slik at en bestemt størrelse J , som får en bestemt verdi for hver gitt funksjon, får en ekstremalverdi.

Problemet som ga opphavet til variasjonsregningen ble formulert av *Johann Bernoulli i 1696:* La A og B være to punkter (B ligger lavere enn A) . Anta at et materielt punkt kan bevege seg fra A til B bare under påvirkning av tyngdekraften (dvs. uten friksjon). Den korteste veien er selvfølgelig den rette linjen som forbinder punktene. Men hvilken kurve gir den korteste tiden? Oppgaven ble løst av Johann sammen med broren *Jacob* og dessuten av *Newton* og *Leibnitz.* Løsningen er den såkalte *sykloiden.* Denne egenskapen hos sykloiden har gitt den navnet den *brakistokrone* kurven. (Brachistos betyr kortest, og chronos betyr tid på gresk).

VARIASJONEN

Anta at vi har en funksjon av tre variable $F(x, y(x), y'(x))$. der $F \in C^2$.
Her er C^2 mengden av to ganger deriverbare funksjoner med kontinuerlige deriverte.

Problemet som kalles *det enkleste variasjonsproblemet* , kan formuleres slik:

$$\textit{Maksimer}\;\; J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \quad \text{når}\;\; y(x_0) = y_0 \quad \textit{og} \quad y(x_1) = y_1 \qquad (\text{ I })$$

For enhver funksjon $y(x)$ vil integralet $J(y)$ anta forskjellige verdier. Vi skal altså finne den funksjonen som gjør at integralet blir størst mulig. (Dersom oppgaven hadde vært å finne minimum kunne vi i stedet se på funksjonen $-F(x, y(x), y'(x))$).

Problemet kan illustreres geometrisk: La $A(x_0, y_0)$ *og* $B(x_1, y_1)$ være to punkter i xy-planet. Enhver kurve som forbinder A med B gir integralet i (I) en bestemt verdi. Finn den kurven som gjør at integralet blir størst (evt. minst.)

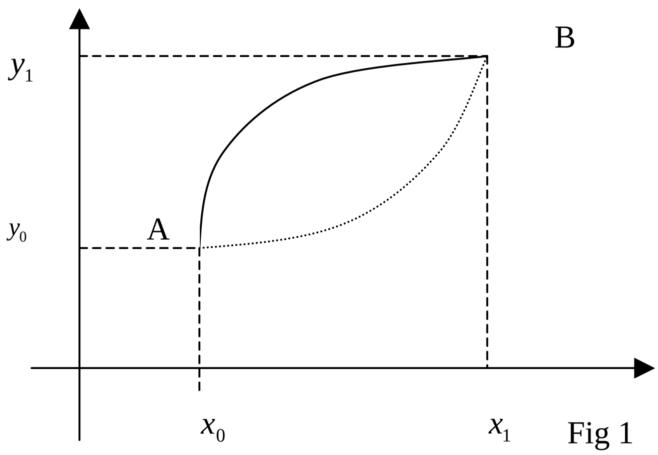

Fig 1

La oss betrakte to kurver som forbinder A og B. (Se Fig 2) . La $y^*(x) \in C^1$ være den funksjonen som løser problemet, og la $y = y^* + \alpha\mu(x) \in C^1$ være en funksjon der $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$ .Her er α ett reelt tall , og $\mu(x) \in C^1$ en funksjon.

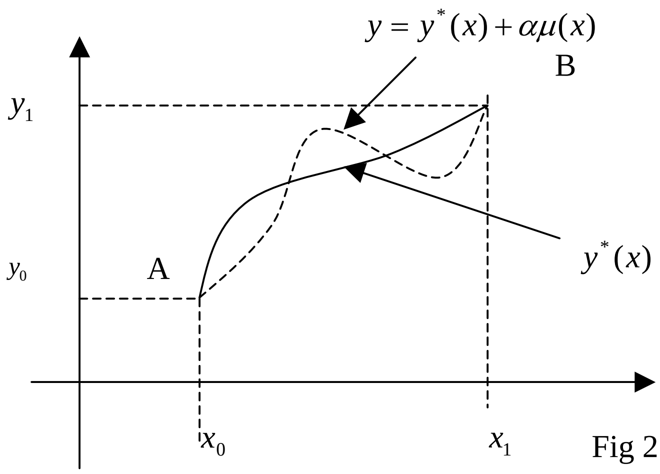

Fig 2

Legg merke til at $y(x_0) = y_0$ og $y(x_1) = y_1$. Hvis $|\alpha|$ er liten så vil $y(x)$ ligge "nær" $y^*(x)$.

Da vi har forutsatt at y^* er optimal vil $J(y^*) \geq J(y^* + \alpha\mu)$ for alle α .

La oss holde funksjon $\mu(x)$ konstant. Da vil $I(\alpha) = J(y^* + \alpha\mu)$ være

en funksjon av α gitt ved $I(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^*(x) + \alpha\mu(x), y^{*\prime}(x) + \alpha\mu'(x))dx$.

Vi har $I(0) = J(y^*)$ og $I(\alpha) \leq I(0)$ for alle α . Da $\alpha = 0$ er et indre punkt i definisjonsområdet til I vil $I'(0) = 0$. Deriverer vi under integraltegnet får vi:

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\alpha}(F(x, y^*(x) + \alpha\mu(x), y^{*\prime}(x) + \alpha\mu'(x))dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (F'_y(x, y^*(x) + \alpha\mu(x), y^{*\prime}(x) + \alpha\mu'(x))\mu(x) + F'_{y'}(x, y^*(x) + \alpha\mu(x), y^{*\prime}(x) + \alpha\mu'(x))\mu'(x))dx$$

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F'_y(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))\mu(x) + F'_{y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))\mu'(x))dx$$

I en mer kompakt notasjon får vi

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial y}\mu(x) + \frac{\partial F^*}{\partial y'}\mu'(x) \right] dx \qquad \text{(II)}$$

hvor * indikerer at de deriverte er evaluert i $(x \;,\; y^* \;,\; y^{*\prime})$

Dersom vi benytter delvis integrasjon på ledd nr to får vi

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F^*}{\partial y'} \mu'(x)dx = \left[\frac{\partial F^*}{\partial y'}\mu(x)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\mu(x)dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\mu(x)dx$$

Setter vi dette inn i (II) får vi:

$$I(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\right]\mu(x)dx = 0$$

Av dette følger at y^* må være en løsning av ligningen

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{(III)}$$

For å komme hit benytter vi oss av følgende:

Variasjonsregningens fundamentallemma:

Anta at f er en kontinuerlig funksjon over $[x_0, x_1]$ *og at* $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\mu(x)dx = 0$ *for enhver funksjon* $\mu = \mu(x)$ *som er 2 ganger deriverbar i intervallet og som tilfredsstiller randbetingelsene* $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. *Da er f(x)=0 for alle* $x \in [x_0, x_1]$

Ligningen (III) kalles ***Euler-ligningen***, etter den sveitsiske matematikeren Leonard Euler som i 1744 viste at dersom en funksjon *y(x)* skal løse problemet i (I), må funksjonen passe inn i (III).

Vi oppsummerer:

Anta at F(x,y,y') er en funksjon av tre variable og at den er to ganger deriverbar med kontinuerlige deriverte .
En nødvendig betingelse for at y(x) skal maksimere/ minimere*
$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ *blant alle tillatte funksjoner y(x), er at y*(x) er en løsning av*
Euler-ligningen $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$
Dersom F(x,y,y') er konkav i y og y' vil vi ha løst maksimeringsproblemet, og dersom F(x,y,y') er konveks i y og y' vil vi ha minimumsløsningen.

(I enkelte tilfeller kan vi se direkte om en funksjon, F, er konkav eller konveks. I andre tilfeller krever det regning som det vil ta for lang tid å komme inn på i dette korte kurset.)

Eksempel 1 Løs problemet:

$$\min \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^2 - 1$$

Vi har $F(x, y, y') = y^2 + y'^2$

Da blir $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ og $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{d}{dx}(2y') = 2y''$

Euler-ligningen blir *2y-2y''= 0* eller *y'' – y = 0*

Dette er en annenordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter, og løsningen blir:

$y = y(x) = Ae^x + Be^{-x}$

For å bestemme konstantene A og B setter vi inn randbetingelsene:

$y(0) = 0 \quad og \quad y(1) = e^2 - 1$

Da får vi: $A + B = 0, \quad Ae + Be^{-1} = e^2 - 1$ som gir $A = e \;\; og \;\; B = -e$ slik at den søkte funksjonen blir

$$y(x) = e^{1+x} - e^{1-x}$$

Siden funksjonen $F(x, y, y')$ åpenbart er konveks, har vi løst problemet.

****

TO SPESIALTILFELLER AV EULER-LIGNINGEN

Dersom *y* ikke inngår eksplisitt i funksjonsuttrykket, dvs funksjonen kan skrives $F(x, y')$ vil $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ og Euler-ligningen reduseres til

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = C \qquad (\text{ IV })$$

Dersom *x* ikke inngår eksplisitt i funksjonsuttrykket for *F*, har vi det såkalte **autonome tilfellet.** Euler-ligningen vil da reduseres til en førsteordens differensialligning i *y'* til å bestemme *y(x).*

For å komme frem til resultatet må vi utføre et par matematiske ”triks”.

Vi minner om **den totale deriverte** av funksjonen $F(x, y, y')$ *:*

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} \qquad (\text{V})$$

Fra Euler-ligningen (III) finner vi $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})$. Setter vi dette inn i (V) får vi

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) + y''\frac{\partial F}{\partial y'}$$

Hvis nå altså *x* ikke inngår eksplisitt i funksjonsuttrykket, vil $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ og vi får:

$$\frac{dF}{dx} - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{d}{dx}(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$$

og vi har

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C \qquad (\text{ VI })$$

I anvendelser, for eksempel innenfor økonomisk teori er det vanlig at den variable er tiden, *t.* Funksjonsuttrykket er ofte betegnet med *x* slik at den funksjonen som skal maksimeres/ minimeres har følgende utseende $F(t, x, \dot{x})$
Den deriverte med hensyn på tiden betegnes som oftest med $\dot{x}$ (leses ”x-prikk”).

Eksempel 2

Finn Euler-ligningen tilordnet problemet integralet

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \dot{x}^2 + 2xe^t)dt$$

Med *t* som variabel og *x(t)* som funksjon blir Euler-ligningen

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

Vi har $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2e^t$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$, $\frac{d}{dt}2\dot{x} = 2\ddot{x}$

Euler-ligningen: $2x + 2e^t - 2\ddot{x} = 0$ eller $\ddot{x} - x = e^t$

****

Eksempel 3

Gitt integralet $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$. Vis at ekstremalene blir sirkler.

Siden *y* mangler i funksjonsuttrykket, kan vi bruke (IV).

$\frac{\partial F}{\partial y'} = C$ gir oss $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C$ og videre

$\sqrt{1+y'^2} = \frac{y'}{Cx}$. Kvadrering og ordning av leddene gir

$y'^2 = \frac{C^2x^2}{1-C^2x^2}$ eller $y' = \frac{\pm Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$

Her finner vi y ved å integrere (substitusjon $u = 1 - C^2x^2$)

$$y = \mp \tfrac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + C_1 = \mp\sqrt{\tfrac{1}{C^2} - x^2} + C_1$$

Eller $x^2 + (y - C_1)^2 = \frac{1}{C^2}$

Altså sirkler.

Oppgave 1

Gitt problemet $\min \int_0^1 (xy' + y'^2)dx$, *y(0)=1 og y(1)=0*

a) Finn Euler-ligningen og løs den.
b) Finn den løsningen som tilfredsstiller randkravene.

Oppgave 2

Løs problemet maks $\int_0^1 (4tx - \dot{x}^2)dt, \quad x(0) = 2, \; x(1) = \frac{2}{3}$

Oppgave 3

Finn Euler-ligningene som er tilordnet integralet $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ når

i) $F(x, y, y') = 2xy + 3yy' + xy'^2$
ii) $F(x, y, y') = -e^{y' - ay}$
iii) $F(x, y, y') = \left((y - y')^2 + y^2\right)e^{-ax}$

Oppgave 4

a) Løs differensialligningen $2y'' - y = 0$
b) Vis at $y = Ae^{\sqrt{\frac{1}{2}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{1}{2}}x} - x$ er en løsning av differensialligningen

$2y'' - y = x$

c) Løs problemet min $\int_0^1 (y^2 + xy + xyy' + y'^2)dx$, *y(0)=0 , y(1)=1*

Oppgave 5

Vis at Euler-ligningen som tilordner problemet

$\min \int_a^b (x^2 + tx\dot{x} + t^2\dot{x}^2)dt$ blir $t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} - \frac{1}{2}x = 0$

Oppgave 6

a) Løs differensialligningen $y''+\frac{1}{x}y'=0$

b) Vis at differensialligningen $y''+\frac{1}{x}y'=1$ har løsningen $y=A\ln|x|+B+\frac{1}{4}x^2$

c) Løs problemet $\min \int_1^2 (2xy+3yy'+xy'^2)dx$, *y(1) = 0* *y(2) = 1*

Oppgave 7

Gitt to punkter i planet $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$.
Grafen som forbinder punktene kaller vi $y = y(x)$.
Buelengden, dvs lengden av den kurven som forbinder *A og B* er gitt ved

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Vis at den korteste avstanden er den rette linjen.

Oppgave 8

Vi har gitt variasjonsproblemet

$$Maks\int_0^T e^{-\frac{t}{4}}\ln(2K-\dot{K})dt \qquad , \quad K(0)=K_0 \quad , K(T)=K_T$$

Vis at Euler-ligningen kan skrives på formen

$A\ddot{K}+B\dot{K}+CK=0$ Hvor *A,B og C* er konstanter.

Løs Euler-ligningen.

FASIT

1 a) $x+2y'=C$, $y=-\frac{1}{4}x^2+C_1x+C_2$

b) $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+1$

2) $x=-\frac{1}{3}t^3-t+2$

3 **i)** $xy''+y'=x$ **ii)** $y''-ay'+a=0$
iii) $y''-ay'+(a-2)y=0$

4 a) $y=Ae^{\sqrt{\frac{1}{2}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{1}{2}}x}$ **c)** Randbetingelsene gir A= -B=$\frac{2}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}-e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

6 a) $=C\ln|x|+C_1$ **c)** $y(x)=\frac{1}{4\ln 2}\ln x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^2$

8) Euler-ligningen blir $4\ddot{K}-15\dot{K}+14K=0$

som har løsningen $K=C_1e^{2t}+C_2e^{\frac{7}{4}t}$