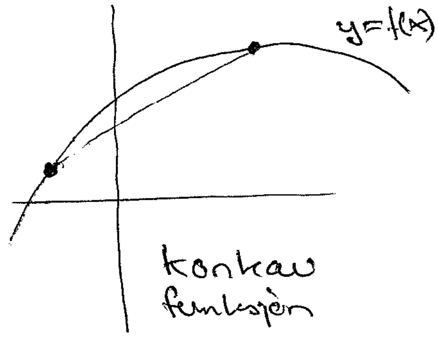
BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

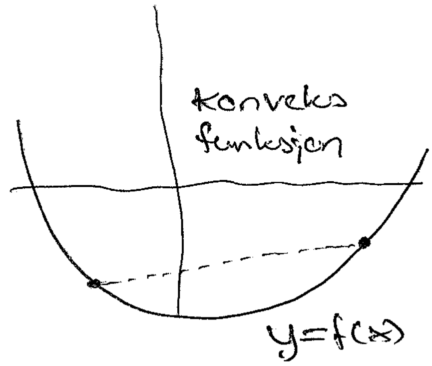
Forelesning 21: Variasjonsregning

Konkave og konvekse funksjoner

En funksjon f er konkav om den hule siden vender ned; det vil si at det rette linjestykket mellom to punkter på grafen til f ligger under eller på grafen til f.



En funksjon f er konveks om den hule siden vender opp; det vil si at det rette linjestykket mellom to punkter på grafen til f ligger over eller på grafen til f.



Husk: Hvis f er en funksjon i en variabel definert på et intervall I, så er

f konkav på I $\iff$ $f''(x) \le 0$ for alle $x \in I$

f konveks på I $\iff$ $f''(x) \ge 0$ — " —

Resultat:
Hvis $f(x,y)$ er en funksjon i to variable, så har vi:

$$f \text{ er konkav} \iff f''_{xx} \le 0,\ f''_{yy} \le 0,\ f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \ge 0$$

$$f \text{ er konveks} \iff f''_{xx} \ge 0,\ f''_{yy} \ge 0,\ f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \ge 0$$

Det fins funksjoner som er både konvekse og konkave, og funksjoner som er hverken konvekse eller konkave.

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks:

i) $f(x,y) = 2x + 3y$ er både konveks og konkav, siden

$$f'_x = 2 \quad f''_{xx} = 0 \quad f''_{xy} = 0 \Rightarrow f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$$
$$f'_y = 3 \quad f''_{yy} = 0$$

ii) $g(x,y) = e^{x+y}$ er konveks, men ikke konkav, siden

$$g'_x = e^{x+y} \quad g''_{xx} = g''_{xy} = g''_{yy} = e^{x+y} \Rightarrow \begin{cases} g''_{xx} \cdot g''_{yy} - (g''_{xy})^2 = 0 \\ g''_{xx},\ g''_{yy} > 0 \end{cases}$$
$$g'_y = e^{x+y}$$

Hvis $f(x,y)$ er en kvadratisk form, så har vi

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ konkav} \Leftrightarrow f \text{ negativt semidefinit} \\ f \text{ konveks} \Leftrightarrow f \text{ positiv semidefinit} \end{array}}$$

Eks: $f(x,y) = 4x^2 + 6xy + 4y^2 = (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda-7)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7, \lambda = 1 \Rightarrow \text{positivt definit}$$

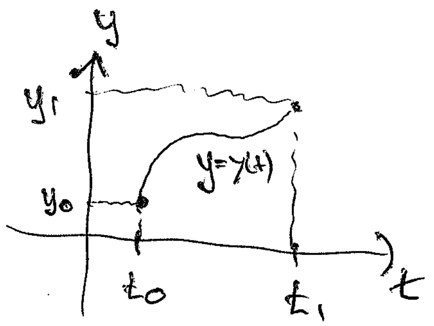
$$\Downarrow$$

f er konveks

Variasjonsproblemet

$$\boxed{\max/\min \int_{t_0}^{t_1} F(t,y,\dot{y})\,dt \quad \text{når} \quad y(t_0)=y_0,\ y(t_1)=y_1}$$

der y_0, y_1 er gitte konstanter og F er en gitt funksjon.



For hver funksjon $y=y(t)$ slik at $y(t_0)=y_0$, $y(t_1)=y_1$, kan vi beregne $\dot{y}$, funksjonen $F(t,y,\dot{y})$ og dermed integralet

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t,y,\dot{y})\,dt$$

Hvilken funksjon y er optimal (gir max/min)?

Eks: Utvinning av olje fra et reservoar

Anta: $y(t)$ = olje i reservoaret ved tiden t (dager), målt i mbbl (millioner fat)

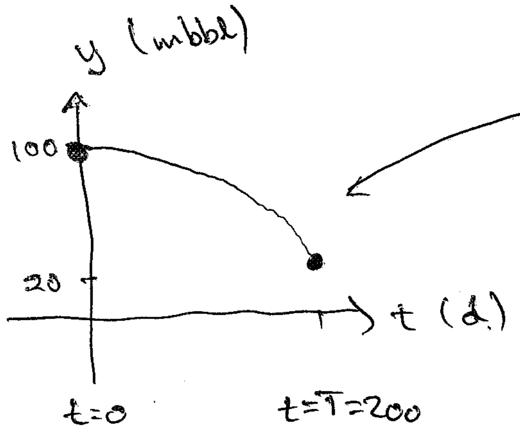
$u(t) = -y'(t)$ utvinningsraten (i mbbl/d.)

$y_0 = y(0) = 100$ mbbl (volum olje nå)
$y_{200} = y(200) = 20$ mbbl (—"— etter 200 dager)

Det er utvinningsraten vi kan variere, innenfor visse rammer (kontrollvariabel). Når u er valgt, er $y(t)$ bestemt siden

$$y'(t) = -u(t), \quad y_0 = 100$$

Hvilken utvinningsrate er "best"?



$y(t)$ ved lav utvinningsrate til å begynne med, og høyere etterhvert

__Anta:__ $p(t)$ = oljepris (USD/bbl) ved tiden t

$C(t,y,\dot{y})$ = kostnadsrate (mUSD/d) — " —

__Da er:__ Samlet profitt $= \int_0^{200} (p(t)\cdot u(t) - C(t,y,\dot{y}))\,dt$ (i mUSD)

__Maksimering av profitt = Variasjonsproblem:__

$$\boxed{\max \int_0^{200} \underbrace{[p(t)\cdot u(t) - C(t,y,\dot{y})]}_{F(t,y,y')}\,dt \;,\; y_0 = 100,\; y_{200} = 20}$$

(husk $u = -y'$)

__Euler-likningen:__

Et variasjonsproblem

$$\max/\min \int_{t_0}^{t_1} F(t,y,\dot{y})\,dt,\; y(t_0) = y_0,\; y(t_1) = y_1$$

har __Euler-likning__

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0}$$

der $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$ regnes ut formelt (som om $\dot{y}$ var en variabel)

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks: $F(t,y,\dot{y}) = y^2 + \dot{y}^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = \dfrac{d}{dt}(2\dot{y}) = 2\cdot\ddot{y} \end{array}\right\}$$

Euler-likning:

$$\underline{\underline{2y - 2\ddot{y} = 0}}$$

Resultat:

i) Dersom $y = y^*(t)$ er optimal i et variasjonsproblem, så vil $y^*(t)$ tilfredsstille Euler-likningen.

ii) Dersom $y = y^*(t)$ tilfredstiller Euler-likningen for et max-variasjonsproblem og $F(t,y,\dot{y})$ er konkav i $(y,\dot{y})$, så $y = y^*(t)$ løsning av max-problemet.

Dersom $y = y^*(t)$ tilfredstiller Euler-likningen for et min-variasjonsproblem og $F(t,y,\dot{y})$ er konveks i $(y,\dot{y})$, så er $y = y^*(t)$ løsning av min-problemet.

For bevis / forklaring av dette, se [V].

Eks: $\max \int_0^1 (-y^2 - \dot{y}^2)\,dt$, $y(0) = 0$, $y(1) = e^2 - 1$

$$\left.\begin{array}{l} F = -y^2 - \dot{y}^2 \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}} = -2\dot{y} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = \dfrac{d}{dt}(-2\dot{y}) = -2\ddot{y} \end{array}\right\}$$

Euler:

$$-2y + 2\ddot{y} = 0$$

Løsning av Euler:

$$+2y'' - 2y = 0 \Rightarrow y'' - y = 0 \quad \left\{\begin{array}{l} r^2 - 1 = 0 \\ r = \pm 1 \\ y = \underline{C_1 e^t + C_2 e^{-t}} \end{array}\right.$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$y(0) = 0: \quad C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$

$y(1) = e^2 - 1: \quad C_1 e + C_2 e^{-1} = e^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 e - C_1 e^{-1} = e^2 - 1$

$$C_1 (e - e^{-1}) = e^2 - 1$$

$$C_1 = \frac{e^2 - 1}{e - e^{-1}} = \frac{e(e^2 - 1)}{e^2 - 1} = e \qquad C_2 = -e$$

Løsn av Euler + initial betingelser:

$$y = e \cdot e^t - e \cdot e^{-t} = \underline{e^{t+1} - e^{1-t}}$$

Konkav / konveks:

$$F = -y^2 - \dot{y}^2$$

neg. definit kvadratisk form $\Rightarrow$ konkav funksjon i $(y, \dot{y})$

$$\Downarrow$$

$y = \underline{\underline{e^{t+1} - e^{1-t}}}$ løser max-problemet