BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

FORELESNING 20: ANDRE ORDENS DIFF. LIKNINGER

En andre ordens diff. likning inneholder y'', og kan skrives på formen

$$\boxed{y'' = F(t, y, y')}$$

der $F(t,y,y')$ er et uttrykk i t, y, y'.

Eks: $y'' = 12t - 4$ (enkel type, F inneholder kun t)

$$y' = \int (12t-4)\,dt = 12 \cdot \tfrac{1}{2}t^2 - 4t + C_1 = 6t^2 - 4t + C_1$$

$$y = \int (6t^2 - 4t + C_1)\,dt = 6 \cdot \tfrac{1}{3}t^3 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

$$y = \underline{\underline{2t^3 - 2t^2 + C_1 t + C}}$$ generell løsn.

Eks: $y'' = y' + t$ (F inneholder t og y' - men ikke y)

Vi gjør variabelskiftet $u := y'$ og får en ny første ordens diff. likning i u

$$u' = u + t$$

$$u' - u = t$$

Første ordens lineær med int. faktor e^{-t}

$$(u \cdot e^{-t})' = te^{-t}$$

$$ue^{-t} = \int te^{-t}\,dt = t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t})\,dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\,dt$$

$$ue^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + C_1$$

Løsn. for $u = y'$

$$u = \underline{-t - 1 + C_1 e^{t}}$$

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$y' = -t - 1 + C_1 e^t \Rightarrow y = \int (-t-1+C_1 e^t)\,dt$

$y = \underline{\underline{-\frac{1}{2}t^2 - t + C_1 e^t + C_2}}$ (gen. løsn.)

Andre ordens diff. likninger er kjennetegnet ved at den generelle løsn. har <u>to</u> frie parametre (C_1 og C_2). For å bestemme entydig løsning, trengs <u>to</u> initialbetingelser.

<u>Eks:</u> $y'' = 12t - 4$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$

<u>Generell løsn:</u> $y = 2t^3 - 2t^2 + C_1 t + C_2$ (se ovenfor)

Regner også ut: $y' = 6t^2 - 4t + C_1$

$y(0) = 3$: $y(0) = C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 3$

$y'(0) = 4$: $y'(0) = C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 4$

<u>Løsn:</u> $y = \underline{\underline{2t^3 - 2t^2 + 4t + 3}}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Lineære andre ordens diff.likninger:

En annen ordens diff.likning er lineær hvis den kan skrives som

$$\boxed{y'' + a(t)\cdot y' + b(t)\cdot y = f(t)}$$

(dvs: $F(t,y,y') = -a(t)y' - b(t)y + f(t)$)

der $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ er funksjoner i t.

Navngivning:
- Homogen hvis $f(t) = 0$
- Inhomogen hvis $f(t) \neq 0$

Konstante koeffisienter hvis $a(t) = a$ og $b(t) = b$ er konstanter

Tilfelle I: Homogen med konstante koeffisienter

Generell form: $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$ der a,b er konstanter

Motivasjon: Husk første ordens lineær homogen med konstante koeff.

$$y' + ay = 0 \Rightarrow (y\cdot e^{+at})' = 0\cdot e^{at} = 0$$

$$y = e^{-at}\cdot\int 0\,dt = e^{-at}\cdot C = C\cdot e^{-at}$$

Vi har løsn. på formen $y = e^{rt}$ og at $r = -a$ kan vi lese av fra V.S. i diff.likningen, $y' + ay$.

Kan vi gjøre noe tilsvarende for andre ordens lineære diff.likninger som er homogene med konstante koeff.?

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Vi setter $y=e^{rt}$ inn i $y''+ay'+by=0$:

$$\begin{cases} \text{VS: } & y''+ay'+by = r^2\cdot e^{rt}+a\cdot r\cdot e^{rt}+b\cdot e^{rt} \\ \text{HS: } & 0 \end{cases}$$

Løsn hvis: $r^2e^{rt}+are^{rt}+be^{rt}=0$

$$(r^2+ar+b)\,e^{rt}=0$$

$$r^2+ar+b=0$$

Konkl: $y=e^{rt}$ er løsn. av $y''+ay'+by=0$ hvis og bare hvis r er løsning av den karakteristiske likningen $r^2+ar+b=0$, en andregradslikn.

Eks: $y''-3y'+2=0 \xrightarrow[\text{likning}]{\text{karakteristisk}} r^2-3r+2=0$

$$r=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

$r=2$ eller $r=1$

Dermed er $y=e^{2t}$ og $y=e^{t}$ to løsn. Den generelle løsn. blir da

$$y=C_1\cdot e^{2t}+C_2\cdot e^{t}$$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Løsningsmetode: Andre ordens lin. homogene diff.likn. med konstante koeff.

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ Kar. likn.}$$

$$r^2 + ar + b = 0$$

Tre tilfeller: i) $a^2 - 4b > 0$: To løsn. $r_1, r_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

Løsn. av diff.likn.:

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}$$

ii) $a^2 - 4b = 0$: En dobbelt rot $r = \frac{-a}{2}$

Løsn. av diff.likn.:

$$y = C_1 e^{rt} + C_2 \cdot t e^{rt}$$

iii) $a^2 - 4b < 0$: Ingen (reelle) løsn.

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{= \alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}}_{= \beta} \cdot \sqrt{-1}$$

Løsn. av diff. likn.:

$$y = e^{\alpha t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\beta t) + C_2 \cdot \sin(\beta t) \right)$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Eks: $y'' - 2y' + y = 0 \quad \dashrightarrow \quad r^2 - 2r + 1 = 0$

$r = 1$ (dobbeltrot)

$$y = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

Eks: $y'' - 4y' + 7y = 0 \quad \dashrightarrow \quad r^2 - 4r + 7 = 0$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2}$$

$$= 2 \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \underbrace{2}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{3}}_{\beta}\sqrt{-1}$$

$\alpha = 2, \ \beta = \sqrt{3}$

$$y = e^{2t}\left(C_1 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)\right)$$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Tilfelle 2; Inhomogene med konstante koeffisienter

Generell form: $\boxed{y'' + ay' + by = f(t)}$ $\begin{cases} a, b \text{ konstanter} \\ f(t) \neq 0 \end{cases}$

"Superposition principle":

Den generelle løsningen av $y'' + ay' + by = f(t)$ har formen

$$y = \underbrace{y_h}_{\substack{\text{den generelle} \\ \text{løsningen av den} \\ \text{homogene diff.} \\ \text{likn. } y''+ay'+by=0}} + \underbrace{y_p}_{\substack{\text{en partikulær} \\ \text{løsn. av den} \\ \text{inhomogen diff.likn.} \\ y''+ay'+by=f(t)}}$$

h = homogen $\qquad$ p = partikulær

Eks: $y'' - 3y' + 2y = 4$ $\qquad$ $f(t) = 4$ er konstant

i) y_h: $y'' - 3y' + 2y = 0$ (homogen)

Løsn: $y_h = \underline{C_1 e^{2t} + C_2 e^{t}}$ (se ovenfor)

ii) y_p: $y'' - 3y' + 2y = 4$ (inhomogen)

Ser etter spesiell løsn: y_p $\longrightarrow$ $\begin{cases} \text{Prøver } y = C: \\ y' = 0,\ y'' = 0 \\ VS: y'' - 3y' + 2y = 2C \\ HS: 4 \\ \text{ok hvis } 2C = 4 \\ \underline{\underline{C = 2}} \end{cases}$

Finner løsn. $y_p \underline{\underline{= 2}}$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Dermed gir "superposition principle" at generell løsn. av $y'' - 3y' + 2y = 4$ er

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} + 2}}$$