BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	MET 22141 Matematikk valgfag
Eksamensdato:	19.05.10, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	3

Oppgave 1

(a) Finn den generelle løsningen av den separable differensiallikningen

$$y\dot{y} = t.$$

(b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$t\dot{y} + y = e^t$$

som tilfredstiller $y(1) = e$.

(c) Finn løsningen av

$$\ddot{y} - 16\dot{y} + 64y = 1$$

som tilfredstiller $y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = 1$.

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i variasjonsproblemet

$$\max / \min \int_0^1 (y\dot{y} + e^y\dot{y} + e^{\dot{y}})dt, \quad y(0) = 0 \text{ og } y(1) = 1.$$

(a) Finn den generelle løsningen av Euler-likningen for dette problemet.

(b) Finn løsningen av likningen i (a) som tilfredstiller initialbetingelsene.

Oppgave 3

En person deltar tre søndager på rad i en konkuranse som gir en pengepremie på 8 000 kr dersom han vinner konkuransen. Konkuransen er krevende og han regner derfor med en sannsynlighet på kun $p = 0.15$ for å vinne en konkuranse. Du kan betrakte de tre konkuransene som uavhengige begivenheter.

La X være antall konkuranser som han vinner. La Y være total gevinst.

(a) Hvilken fordeling har X?

(b) Hva er sannsynligheten for at han vinner 2 av de tre konkuransene?

(c) Beregn $E(X)$ og $E(Y)$

(d) Beregn $Var(X)$ og $Var(Y)$

(e) Personen ønsker å øke sannsyligheten for å vinne konkuransene. Han bestemmer seg derfor å legge seg i hard trening fremover, og regner nå med følgende sannsynligheter.

- Sannsyligheten for å vinne konkuranse nr 1 er $p_1 = 0.2$
- Sannsyligheten for å vinne konkuranse nr 2 er $p_2 = 0.3$
- Sannsyligheten for å vinne konkuranse nr 3 er $p_3 = 0.4$

Beregn $P(X = 0)$ $P(X = 1)$ $P(X = 2)$ $P(X = 3)$

Beregn $E(X)$

Oppgave 4

En eksponensialfordelt stokastisk variabel har sannsynlighetstettheten

- $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ når $x \geq 0$
- $g(x) = 0$ ellers

dersom $\lambda = 1$ vil tettheten være $f(x) = e^{-x}$

Vis ved integrasjon at

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2$

La X være en stokastisk variabel som har $f(x)$ til tetthet.

Beregn $Var(X)$

Oppgave 5

To stokastiske variable X og Y er simultanfordelt med sannsynlighetstetthet gitt ved

- $f(x,y) = \frac{1}{2}(xe^{-x}e^{-y} + ye^{-x}e^{-y})$ når $x \geq 0$ $y \geq 0$
  $f(x,y) = 0$ ellers

Her kan du med stor fordel benytte deg av oppgave 4.
(Du får også oppgitt at $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}dx = 6$)

(a) Beregn $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
(b) Beregn $E(X)$
(c) Beregn $Var(X)$
(d) Beregn $E(XY)$
(e) Beregn $Cov(X,Y)$ (Opplysning $E(X) = E(Y)$)

Oppgave 6

Estimer β_0, β_1, β_2 og β_3 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \epsilon$ ut fra observasjonene

$$y_1 = 2, (x_{11}, x_{12}, x_{13}) = (0,1,1)$$
$$y_2 = 0, (x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (-1,0,2)$$
$$y_3 = 1, (x_{31}, x_{32}, x_{33}) = (0,0,-1)$$
$$y_4 = 2, (x_{41}, x_{42}, x_{43}) = (1,0,-1)$$

Du får oppgitt at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Oppgave 7

Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Oppgave 8

Ta utganspunkt i funksjonen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1$$

Skriv f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der A er en symmetrisk 3×3-matrise og B er en 1×3-matrise, og finn vektoren $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$. Finn egenverdiene til A og avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv definitt.