Konneksjoner og monodromi for en klasse moduler over simple kurvesingulariteter

Eivind Eriksen

22. mai 2000

Innhold

Forord

Denne hovedoppgaven ble skrevet ved Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo i tiden mellom januar 1992 og desember 1994. Jeg synes det har vært svært utfordrende og lærerikt å arbeide med denne oppgaven, og vil gjerne takke min veileder, professor O.A. Laudal, for at han introduserte meg til denne delen av matematikken.

Ellers vil jeg takke alle på lesesal C207 for den hjelp og støtte de har gitt under hovedfagsstudiet. Spesielt vil jeg takke Helge, Roy, Trond og alle de andre for mange givende diskusjoner, og Kristine, som tok seg tid til å lese korrektur på deler av oppgaven.

Til slutt en takk til Arne B. Sletsjøe, som først vakte min interesse for algebra, og til Jan Christoffersen, Kristian Ranestad, Geir Ellingsrud og Arvid Siqveland som alle har gitt vesentlige bidrag til min forståelse av dette feltet.

Oslo, 14. november 1994

Eivind Eriksen

Innledning

Vi ønsker å studere følgende problem: Gitt en kropp k, en k-algebra A og en A-modul M. Når er det mulig å utvide A-modul strukturen på M til en D-modul struktur på M, og hvis det er mulig, hvilke slike utvidelser finnes?

Vi presiserer dette begrepet: La $D = Diff_k(A)$, de linære differensial-operatorene på A. Dette er en filtrert k-algebra som inneholder A, og den er gitt på følgende måte: La $D = \sum_p Diff_k^p(A)$, der $Diff_k^p(A)$ er en undermodul av $End_k(A)$ (de k-linære endomorfier på A) for hver $p \geq 0$. Elementene i undermodulen $Diff_k^p(A)$ kalles de linære differensial-operatorene på A av orden p. Vi definerer $Diff_k^0(A) = A$, og for hver $p \geq 1$, definerer vi $Diff_k^p(A)$ induktivt: Vi sier at $\phi \in End_k(A)$ er en linær differensial-operator av orden p hvis $[\phi, a]$ er en linær differensial-operator av orden $p - 1$ for alle $a \in A$. (Produktet $[-, -]$ er vanlig Lie-produkt på $End_k(A)$).

En A-modul struktur på M er en representasjon av A, altså en ringhomomorfi $\rho : A \to End_k(M)$. Vi sier at A-modul strukturen til M kan utvides til en D-modul struktur på M hvis det finnes en ringhomomorfi $\rho^* : D \to End_k(M)$ som kommuterer med ρ via den opplagte inklusjonen $A \subseteq D$.

Det følger lett at for en vilkårlig k-algebra A, er $Diff_k^1(A) = A \oplus Der_k(A)$. En nødvendig betingelse for eksistens av en D-modul struktur på en modul M er derfor at det finnes en A-linær avbildning $\nabla : Der_k(A) \to End_k(M)$ som også er en homomorfi av k-Lie algebraer. (Avbildningen må bevare A-modul struktur og k-Lie algebra struktur, siden ρ^* skal være en ringhomomorfi). Dessuten må ∇_δ ha derivasjonsegenskap for alle $\delta \in Der_k(A)$. Det betyr at for alle $a \in A$, $m \in M$, så er $\nabla_\delta(am) = a\nabla_\delta(m) + \delta(a)m$. Dette kommer også av at ρ^* er ringhomomorfi. Tilsammen er dette nøyaktig begrepet integrabel, kovariant derivasjon. Det følger derfor at eksistens av en integrabel kovariant derivasjon er en nødvendig betingelse for eksistens av en D-modul struktur på M.

Vi innfører i oppgaven begrepet $Der_k(A)$-konneksjon på M. Dette er det samme som en kovariant derivasjon (på $Der_k(A)$), og vi vil i fortsettelsen bruke dette begrepet.

Dersom A er polynomringen $A = k[x_1, \dots, x_n]$, er $Diff_k(A) = W_n$, Weyl-algebraen i n variable gitt ved at $W_n = k[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$. Dette er en ikke-kommutativ ring, som vi har god kjennskap til. Det er kjent at eksistens av en integrabel $Der_k(A)$-konneksjon på M er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for eksistens av en D-modul struktur på M, i tilfellet at A er en lokal, regulær k-algebra, og M en fri A-modul. Ifølge proposisjon 1.4, er en integrabel $Der_k(A)$-konneksjon på M det samme som en integrabel konneksjon på M. I pene tilfeller gir derfor eksistens av en integrabel konneksjon på M en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for eksistens av en D-modul struktur på M.

Er derimot A en singulær k-algebra, vet vi svært lite om $Diff_k(A)$. I dette tilfellet er det opprinnelige spørsmålet altfor vanskelig. Vi kan istedet stille følgende spørsmål, som naturligvis er motivert av det vi alt har sagt om D-modul strukturer: Hvilke betingelser finnes for eksistens av integrable $Der_k(A)$-konneksjoner på M? Hvis det finnes slike konneksjoner, hvordan ser disse ut og hvilke egenskaper har de?

Vi er dermed interessert i å undersøke betingelser for eksistens av en $Der_k(A)$-konneksjon på M. Vi har i kapittel 1 utviklet en teori som gir oss slike betingelser, og vist at det finnes en to-delt obstruksjon for eksistens av slike konneksjoner: Første obstruksjon er Kodaira-Spencer avbildningen $g : Der_k(A) \to End_k(M)$, og dens kjerne $\mathbf{V} = ker(g)$, fordi betingelsen $\mathbf{V} = Der_k(A)$ (det vil si at $g = 0$) er en nødvendig betingelse for eksistens av en $Der_k(A)$-konneksjon på M. Vi har også vist at hvis $\mathbf{V} = Der_k(A)$, finnes et entydig element $lc(M) \in Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. Dette er en obstruksjon for eksistens av en $\mathbf{V}$-konneksjon, i den forstand at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. (Se avsnitt 1.3 for disse resultatene). Dermed er $(g = 0,\ lc(M) = 0)$ en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for eksistens av en $Der_k(A)$-konneksjon på M.

Vi vet nå eksakt når det finnes en $Der_k(A)$-konneksjon på M. Merk imidlertid at spørsmålet om når det eksisterer integrable $Der_k(A)$-konneksjoner på M fortsatt er ubesvart.

Dersom det finnes en $Der_k(A)$-konneksjon på M, vet vi at mengden av alle slike konneksjoner er en torsor over potensialene $Hom_A(Der_k(A), End_A(M))$. Vi har dessuten vist at dersom det eksisterer en integrabel $Der_k(A)$-konneksjon på M, så er mengden av integrable $Der_k(A)$-konneksjoner en torsor over en undermengde av potensialene som vi har bestemt eksplisitt (se avsnitt 1.3). Dersom $End_A(M)$ er en kommutativ ring, kan denne undermengden beskrives som $Der_{k,A}(Der_k(A), End_A(M))$. Hvis det finnes en integrabel $Der_k(A)$-konneksjon på M, vet vi derfor eksplisitt hvordan alle andre slike konneksjoner ser ut.

Vi nevner til slutt at at de fleste resultatene i kapittel 1 er gitt i [La2], og er hentet derfra.

Teorien i kapittel 1 er svært generell, så i kapittel 2 begrenser vi oss til følgende tilfelle: Vi betrakter k-algebraer A som er simple kurvesingulariteter, de enkleste singulære k-algebraene av dimensjon 1. Merk spesielt at siden disse algebraene har dimesjon 1, har $\wedge^2_A Der_k(A)$ støtte i et eneste punkt (når vi betraktet $Der_k(A)$ som knippe på $Spec(A)$). Det følger derfor at enhver $Der_k(A)$-konneksjon på M er integrabel utenfor dette ene punktet (som er singulariteten). Over k-algebraer A av denne typen, betrakter vi en klasse A-moduler som har spesielt enkle, frie minimal-oppløsninger. Dette er de A-modulene som kommer fra refleksive, indekomposable moduler over den kompletterte ringen $B = \hat{A}$. Denne klassen av moduler over simple kurvesingulariteter er i en viss forstand de enkleste som ikke er trivielle. Vi ønsker derfor å anvende teorien fra kapittel 1 på disse eksemplene.

Den generelle teorien besvarer de fleste av spørsmålene vi har stilt: Vi vet en del om når det finnes integrable $Der_k(A)$-konneksjoner på M, og hvis det finnes en slik konneksjon, vet vi nøyaktig hvordan alle andre slike konneksjoner ser ut. Når det gjelder egenskapene til disse integrable $Der_k(A)$-konneksjonene på M, vet vi imidlertid ikke så mye i den generelle situasjonen.

Vi begrenser oss derfor til de k-algebraer A og A-moduler M som vi har beskrevet i kapittel 2. I pene tilfeller, det vil si når $k = \mathbf{C}$, og A er et integritetsområde, kan vi definere monodromi for hver $Der_k(A)$-konneksjon ∇ på M: Vi betrakter de lukkede punktene i $Spec(A)$ utenfor singulariteten, og kaller dette rommet Y. Dette rommet arver Zariski-topologi fra $Spec(A)$, men Y er i 1-1 korrespondanse med det komplekse planet utenfor origo, $\mathbf{C} - \{0\}$. Vi velger derfor å betrakte det topologiske rommet Y med sterk topologi. Da har Y fundamentalgruppe $\mathbf{Z}$, og fra avsnitt 2.4 følger det nå at hver $Der_k(A)$-konneksjon ∇ på M gir opphav til en monodromi-avbildning $\mathbf{M} : \mathbf{Z} \to Aut_k(k^n)$, der n er rangen til modulen M. Denne avbildningen er bestemt av et eneste element i $Aut_k(k^n)$, nemlig $\mathbf{M}(1)$, og dette elementet vil vi kalle monodromien til $Der_k(A)$-konneksjonen ∇ på M.

Merk at i denne spesielle situasjonen kan vi definere monodromi for $Der_k(A)$-konneksjoner som ikke er integrable. Dette er fordi A har dimensjon 1, slik at enhver konneksjon er integrabel utenfor det singulære punktet.

Vi ser nå at hver modul M av rang n, med en bestemt $Der_k(A)$-konneksjon ∇ på M, kan tilordnes en $n \times n$-matrise med verdier i $\mathbf{C}$ som kalles monodromien til ∇.

Legg også merke til at elementet $\mathbf{M}(1) \in Aut_k(k^n)$ vil generere en syklisk undergruppe av $Aut_k(k^n)$ som kalles monodromigruppa til ∇. I de tilfellene vi betrakter, er det ikke urimelig å vente at denne monodromigruppa har endelig orden. I så fall får vi en enkel aritmetisk invariant for disse modulene.

I kapittel 3 har vi valgt eksempelet $A = k[x, y]/(x^4 + y^3)$, og M er den entydig gitt modulen over A av rang 2 med oppløsning av rang 3. Vi har i dette tilfellet vist følgende:

1. Kodaira-Spencer kjernen $\mathbf{V} = Der_k(A)$. (Avsnitt 3.1).

2. Obstruksjonsrommet $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M)) \neq 0$. (Avsnitt 3.2.2).

3. Obstruksjonen $lc(M) = 0$. (Avsnitt 3.2.4).

4. Vi har funnet en eksplisitt $\mathbf{V}$-konneksjon ∇^0 på M. (Avsnitt 3.2.5).

5. Konneksjonen ∇^0 er integrabel. (Avsnitt 3.3).

6. Konneksjonen ∇^0 har triviell monodromi. (Avsnitt 3.4).

7. Vi har funnet en fri undermodul M_0 av M av rang 2, og beskrevet M som en ekstensjon av A/m^2 med M_0. (Avsnitt 3.5).

8. Vi har funnet generatorer for $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. (Avsnitt 3.2.5).

Fra regningen går det fram at konneksjonen ∇^0 er ikke-triviell. Selv om vi har funnet generatorer for alle **V**-konneksjoner på M, ser vi at det er svært vanskelig å få oversikt over denne mengden. Ettersom konneksjonen ∇^0 er integrabel, har vi ligninger som beskriver alle integrable **V**-konneksjoner på M. Vi har ikke forsøkt å beskrive denne mengden.

Kapittel 1

Teorien

Vi antar i hele oppgaven at k er en algebraisk lukket kropp med $char(k) = 0$. Vi definerer kategorien $\mathbf{A}$, slik at objektene i $\mathbf{A}$ er endelig-genererte k-algebraer, og morfiene i $\mathbf{A}$ er k-algebra homomorfier. Dette er en underkategori av kategorien av k-algebraer, $\mathbf{Alg}_k$. For hver k-algebra A definerer vi dessuten kategorien $\mathbf{M}_A$, slik at objektene i denne kategorien er endelig-genererte A-moduler, og morfiene er A-modul homomorfier. Dette er en underkategori av kategorien av A-moduler, $\mathbf{Mod}_A$. Vi er nå interessert i å studere par (A, M) slik at A er et objekt i $\mathbf{A}$, og M er et objekt i $\mathbf{M}_A$. I denne oppgaven skal alle par (A, M) være av denne typen.

1.1 Konstruksjonene

Vi minner om definisjonen av et lokalt ringet rom:

Definisjon 1.1 *Et lokalt ringet rom er et topologisk rom X sammen med et knippe O_X på X, slik at for hvert punkt $x \in X$, så er stilken $O_{X,x}$ en lokal ring. En morfi mellom to lokalt ringede rom (X, O_X) og (Y, O_Y) er et par $(f, f^{\#})$, der $f : X \to Y$ er en kontinuerlig avbildning av topologiske rom, og $f^{\#} : O_Y \to f_*O_X$ er en avbildning av knipper på Y, slik at den induserte avbildningen $f_P^{\#} : O_{Y,f(P)} \to O_{X,P}$ er en lokal homomorfi av lokale ringer for hvert punkt $P \in X$.*

Vi kan nå danne kategorien av de lokalt ringede rom, med lokalt ringede rom som objekter, og morfier av lokalt ringede rom som morfier.

Vi minner også om at for en vilkårlig k-algebra H, kan vi konstruere det topologiske rommet $Spec(H) = \{p \subseteq H : p \text{ primideal}\}$. Det topologiske rommet $Spec(H)$ har en basis for de åpne mengdene, gitt ved $\{D(f)\}_{f \in H}$, der $D(f) = \{p \in Spec(H) : f \notin p\}$ for hver $f \in H$. Vi kan dessuten konstruere et knippe $O_{Spec(H)}$ på $Spec(H)$, og dette knippet er definert ved at $O_{Spec(H)}(D(f)) = H_{\{f\}}$ for hver $f \in H$. Det er kjent at $(Spec(H), O_{Spec(H)})$ er et lokalt ringet rom. Videre gir en k-algebra homomorfi $\phi : A \to B$ opphav til en morfi $Spec(\phi) : Spec(B) \to Spec(A)$ av lokalt ringede rom.

Definisjon 1.2 *Et affint skjema over k er et lokalt ringet rom (X, O_X), slik at det fins en isomorfi $\phi : (X, O_X) \to (Spec(H), O_{Spec(H)})$ av lokalt ringede rom for en k-algebra H.*

Det er nå klart at klassen av affine skjemaer over k er en kategori. Denne kategorien kalles $\mathbf{Aff_k}$, og er en underkategori av kategorien av lokalt ringede rom. Vi har at $Spec : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Aff}_k$ er en kontravariant funktor, og det er kjent at denne funktoren gir en dualitet av kategorier. Siden $\mathbf{A}$ er en underkategori av $\mathbf{Alg}_k$, gir $Spec$ opphav til en underkategori av $\mathbf{Aff}_k$:

Definisjon 1.3 *Kategorien av affine skjemaer over k av endelig type, $\mathbf{E}$, er kategorien som er gitt på følgende måte: Objektene i $\mathbf{E}$ er av typen $(Spec(A), O_{Spec(A)})$, der A er en endelig-generert k-algebra, og morfiene i $\mathbf{E}$ er av typen $Spec(\phi) : Spec(B) \to Spec(A)$, indusert av en k-algebra homomorfi $\phi : A \to B$ av endelig-genererte k-algebraer. Vi vil ofte referere til denne kategorien som kategorien av affine skjemaer av endelig type, og ofte referere til objekter i kategorien som $X = Spec(A)$ (uten å referere til strukturknippet).*

Vi innfører følgende notasjon for affine skjemaer av endelig type: La $X = Spec(A)$ være et slikt skjema, og $O_X = O_{Spec(A)}$ være det naturlige strukturknippet på X. Da er det en 1-1 korrespondanse mellom punkter i X og primidealer i A, og vi identifiserer da punktet $x \in X$ med primidealet $p_x \subseteq A$. Vi definerer dessuten $\mathbf{k}(x) = A_{p_x}/p_x$ for hvert punkt $x \in X$. Legg merke til at $\mathbf{k}(x)$ er en A-algebra og samtidig en kropp for hvert punkt $x \in X$. Vi sier videre at et punkt $x \in X$ er lukket dersom ettpunktsmengden $\{x\} \subseteq X$ er lukket i topologien til X. Det følger nå lett at $x \in X$ er et lukket punkt hvis og bare hvis $p_x \subseteq A$ er et maksimalt ideal. (Vi kaller i dette tilfellet idealet for m_x). Dette betyr at $\mathbf{k}(x) \cong k$ som k-algebraer hvis og bare hvis $x \in X$ er et lukket punkt. Vi vil ofte først og fremst være interessert i de lukkede punktene i X, og definerer derfor delmengden av slike punkter, $X_m = \{x \in X : x \text{ er et lukket punkt}\} \subseteq X$. Til slutt nevner vi at det til ethvert punkt $x \in X$ svarer en opplagt A-algebra homomorfi $\phi_x : A \to \mathbf{k}(x)$, og at dette gir en 1-1 korrespondanse mellom lukkede punkter $x \in X$ og k-algebra homomorfier $\phi : A \to k$.

Et punkt x i et affint skjema X av endelig type er regulært dersom den lokale ringen $O_{X,x}$ er regulær, og singulært i motsatt fall. Ved hjelp av disse begrepene kan vi definere glatthet: Et affint skjema av endelig type er glatt dersom det ikke har noen singulære punkter, og en endelig-generert k-algebra A er en glatt ring dersom det tilsvarende skjemaet $X = Spec(A)$ er glatt.

Betrakt kategorien $\mathbf{C}^\infty$, med objekter av typen X, der X er en (uendelig) differensiabel reell mangfoldighet, og morfiene er de (uendelig) differensiable funksjonene mellom slike mangfoldigheter. Dette er en under-kategori av kategorien av de lokalt ringede rom i følgende forstand: La X være et objekt i $\mathbf{C}^\infty$, da er X et topologisk rom. Konstruer et knippe på X, ved at for hver åpen delmengde $U \subseteq X$, la $O_X(U)$ være de (uendelig) differensiable funksjonene fra U inn i $\mathbf{R}$. Dette er opplagt en ring for hver åpen U. Hvis $U \subseteq V$ er to åpne mengder i X, la avbildningen $O_X(V) \to O_X(U)$ være gitt ved restriksjon til U. På denne måten får vi opplagt et knippe av ringer på X. Til slutt er $O_{X,x}$ en lokal ring for hver $x \in X$, så X er et lokalt ringet rom på en naturlig måte.

La X og Y være to objekt i $\mathbf{C}^\infty$, og la $f : X \to Y$ være en morfi i denne kategorien. Det betyr at f er en (uendelig) differensiabel funksjon fra X til Y. Da er spesielt f kontinuerlig. Dessuten har f følgende egenskap: Hvis $V \subseteq Y$ er en åpen mengde, vil f transformere de (uendelig) differensiable funksjonene på V til de (uendelig) differensiable funksjonene på den åpne mengden $f^{-1}(V) \subseteq X$. Dette betyr at f induserer en avbildning $f_V^\# : O_Y(V) \to O_X(f^{-1}(V))$ for hver åpen $V \subseteq Y$, gitt ved at $g \in O_Y(V)$ går til $g \circ f \in O_X(f^{-1}(V))$. Dette gir en indusert avbildning av knipper på Y, $f^\# : O_Y \to f_* O_X$. Til slutt ser vi at dette igjen induserer en avbildning av stilker $f_P^\# : O_{Y,f(P)} \to O_{X,P}$ for hver $P \in X$, og at dette er en lokal homomorfi av lokale ringer for hver $P \in X$. Det følger nå at hver morfi f i kategorien av (uendelig) differensiable mangfoldigheter, gir opphav til en morfi av lokalt ringede rom på en naturlig måte.

For hvert objekt $X = Spec(A)$ i kategorien $\mathbf{E}$, og for en vilkårlig åpen mengde $U \subseteq X$, kan vi dessuten betrakte elementene i $O_X(U)$ som funksjoner på U på følgende måte: Vi vet at ethvert element $s \in O_X(U)$ spesielt har formen

$$s : U \to \prod_{x \in U} O_{X,x}$$

der $s_x \in O_{X,x}$ for hver $x \in U$. Siden $O_{X,x} \cong A_{p_x}$ for alle $x \in X$, og vi har en naturlig avbildning $A_{p_x} \to \mathbf{k}(x)$ for hver $x \in X$, gir s en avbildning

$$s : U \to \prod_{x \in U} \mathbf{k}(x)$$

der $s(x) \in \mathbf{k}(x)$ for hver $x \in U$. Men $\mathbf{k}(x) \cong k$ hvis og bare hvis x er et lukket punkt, så vi får indusert en avbildning

$$s : U \cap X_m \to k$$

Vi kan derfor se på hvert element i $O_X(U)$ som en avbildning fra de lukkede punktene i U og inn i k. I kategorien $\mathbf{E}$ er altså O_X et knippe av funksjoner på U (i en viss forstand) akkurat som for kategorien $\mathbf{C}^\infty$.

Dette er motivasjonen for å sammenligne kategoriene $\mathbf{E}$ og $\mathbf{C}^\infty$. For en differensiabel mangfoldighet X er begreper som vektorbunt, tangentbunt, tangentrom og vektorfelter definert. Vi vil definere lignende begreper for et affint skjema av endelig type, $X = Spec(A)$:

Betrakt et par (A, M), og sett $M(x) = M \otimes_A \mathbf{k}(x)$ for hvert punkt $x \in X$. Dette gir et $\mathbf{k}(x)$-vektorrom for hvert punkt $x \in X$, så M definerer *en familie av vektorrom over* X. Vi sier at dette er familien indusert av modulen M. En av grunnene til at vi betrakter slike familier, er følgende resultat:

Proposisjon 1.1 *For en familie av vektorrom over X generert av en modul M, der M er et objekt i kategorien $\mathbf{M}_A$, har vektorrommet $M(x)$ endelig dimensjon for alle $x \in X$.*

Bevis: Det fins generatorsett $y_1, \ldots, y_r$ for M over A, siden M er endelig generert A-modul. Dette betyr at $y_1 \otimes \overline{1}_x, \ldots, y_r \otimes \overline{1}_x$ er et generatorsett for $M(x)$ over $\mathbf{k}(x)$. Det følger at $M(x)$ har endelig dimensjon som $\mathbf{k}(x)$-vektorrom for et vilkårlig punkt $x \in X$.

$\square$

For en differensiabel mangfoldighet, fins en spesiell vektorbunt som kalles tangentbunten, og denne er slik at fiberen i hvert punkt $x \in X$ er tangentrommet til x i X, $T_{X,x}$. Vi nevner også at de (uendelig differensiable) seksjonene av tangentbunten kalles vektorfeltene på X.

Vi returner nå til kategorien av affine skjemaer X av endelig type, og gir følgende definisjon:

Definisjon 1.4 *Tangentrommet til et affint skjema $X = Spec(A)$ av endelig type i et punkt $x \in X$ er $\mathbf{k}(x)$-modulen $T_{X,x} = Der_k(A, \mathbf{k}(x))$.*

Dette gir opphav til en familie av vektorrom T, gitt ved at $T(x) = T_{X,x}$ for hver $x \in X$. Vi har følgende resultat:

Proposisjon 1.2 *Tangentrommet $T_{X,x} \cong Hom_A(m_x/m_x^2, \mathbf{k}(x))$ for hvert lukket punkt $x \in X$. For slike punkter har dessuten tangentrommet endelig dimensjon som $\mathbf{k}(x)$-vektorrom.*

Bevis: La $\delta \in Der_k(A, \mathbf{k}(x))$, da er $\delta(m_x^2) = 0$, for la $x, y \in m_x$, da er $\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x) = 0$. Da induserer δ opplagt en k-lineær homomorfi $\phi : m_x/m_x^2 \to \mathbf{k}(x)$. Vi viser så at denne homomorfien er A-lineær: La $a \in A$, $\overline{x} \in m_x/m_x^2$, da er $\phi(a\overline{x}) = a\delta(x) + x\delta(a) = a\delta(x) = a\phi(\overline{x})$. La omvendt $\phi : m_x/m_x^2 \to \mathbf{k}(x)$ være en A-lineær homomorfi. Dette gir oss opplagt en A-lineær homomorfi $\eta : m_x \to \mathbf{k}(x)$, med $\eta(m_x^2) = 0$. Vi danner nå $\delta : A \to \mathbf{k}(x)$ på følgende måte: Vi vet at ethvert element $a \in A$ kan skrives på formen $a = k + m$, med $k \in k$, $m \in m_x$ på en entydig måte. (Velg $k = \phi_x(a) \in k$, og $m = a - k \in m_x$). Vi lar så $\delta(a) = \eta(m)$. Dette er opplagt en k-lineær homomorfi, og dessuten en derivasjon: La $x, y \in A$, da har disse elementene formen $x = k + m$, $y = l + n$, med $k, l \in k$, $m, n \in m_x$. Da er $xy = kl + kn + lm + mn$, med $kl \in k$, $kn + lm + mn \in m_x$. Dette gir oss at $\delta(xy) = \eta(kn + lm + mn) = \eta(kn + lm) = k\eta(n) + l\eta(m) = x\delta(y) + y\delta(x)$. Vi har nå vist at $T_{X,x} \cong Hom_A(m_x/m_x^2, \mathbf{k}(x))$ som vektorrom.

Men $Hom_A(m_x/m_x^2, \mathbf{k}(x))$ er det duale vektorrommet til (m_x/m_x^2), og siden A er Noethersk, er det maksimale idealet m_x endelig generert. Da har (m_x/m_x^2) endelig dimensjon som $\mathbf{k}(x)$-vektorrom, og derfor har det duale vektorrommet også den samme, endelige dimensjon. Det følger derfor at tangentrommet $T_{X,x}$ har endelig dimensjon over $\mathbf{k}(x)$. Denne dimensjonen kalles imbeddings-dimensjonen til X i x.

$\square$

Resultatet er fortsatt riktig om vi istedet for de lukkede punktene betrakter alle punkter $x \in X$. Dette resultatet kommer vi imidlertid ikke til å trenge, så vi gir ikke noe bevis i den mer generelle situasjonen.

Legg merke til at hvert element $\delta \in Der_k(A)$ kan betraktes som en tilordning, som til hvert punkt $x \in X$ tilordner en tangentvektor i $T_{X,x}$ på følgende måte: Til hvert punkt $x \in X$, svarer det en $\phi_x \in Hom_A(A, \mathbf{k}(x))$, så $\phi_x \circ \delta \in Der_k(A, \mathbf{k}(x)) = T_{X,x}$. Tilordningen er dermed gitt ved at $x \mapsto \phi_x \circ \delta$. Vi definerer nå :

Definisjon 1.5 *For et affint skjema $X = Spec(A)$ av endelig type, sier vi at vektorfeltene på X er $Der_k(A)$. Knippet av vektorfelter på X kalles θ_X, og vi skriver gjerne $\theta_X(X) = Der_k(A)$.*

Vi trenger et begrep som gjør det mulig å sammenligne de ulike vektorrommene innenfor en familie av vektorrom over X indusert av en modul M. Begrepet konneksjon er nøyaktig det vi trenger. Men før vi kan definere hva en konneksjon er, må vi definere modulen av Kähler-differensialer på A over k, $\Omega_{A/k}$:

Det finnes en opplagt k-algebra homomorfi $m : A \otimes_k A \to A$, definert ved at $m(a \otimes b) = ab$ for alle $a, b \in A$. Vi definerer $I = \ker(m) \subseteq A \otimes_k A$, og $\Omega_{A/k} = I/I^2$. På denne måten er $\Omega_{A/k}$ opplagt en $A \otimes_k A$-modul. Siden $I\Omega_{A/k} = 0$, og $A \otimes_k A/I \cong A$, er $\Omega_{A/k}$ en A-modul. Men m har to opplagte seksjoner $i_1, i_2 : A \to A \otimes_k A$, med $i_1(a) = 1 \otimes a$, $i_2(a) = a \otimes 1$ for $a \in A$, så det er to kandidater til en A-modul struktur på $\Omega_{A/k}$: For $a \in A$ og $\overline{x} \in \Omega_{A/k}$, kan vi betrakte $\overline{i_k(a)x}$ for $k = 1, 2$. Vi viser nå at disse A-modul strukturene er like: La $x \in I$, $a \in A$, og betrakt $(i_1(a) - i_2(a))x = (1 \otimes a - a \otimes 1)x$. Siden $m(1 \otimes a - a \otimes 1) = 0$, er $i_1(a) - i_2(a) \in I$, og dermed $(i_1(a) - i_2(a))x \in I^2$. Det følger at $\overline{i_1(a)x} = \overline{i_2(a)x}$ som elementer i $\Omega_{A/k}$, så $\Omega_{A/k}$ er A-modul på en kanonisk måte. Vi har dessuten en k-lineær derivasjon $d : A \to \Omega_{A/k}$, definert ved $d(a) = \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}$. At dette faktisk er en derivasjon, kan vi se ved at $d(ab) = 1 \otimes ab - ab \otimes 1 = a(1 \otimes b - b \otimes 1) + (1 \otimes a - a \otimes 1)b$, betraktet som elementer i $\Omega_{A/k}$.

Fra k-algebraen A har vi nå konstruert et par $(\Omega_{A/k}, d)$ av en A-modul $\Omega_{A/k}$ og en k-lineær derivasjon $d : A \to \Omega_{A/k}$ på en kanonisk måte. Vi kaller $\Omega_{A/k}$ for modulen av differensialformer på A over k (eller modulen av Kähler-differensialer på A over k), og d for den universelle derivasjonen på A. Dette paret $(\Omega_{A/k}, d)$ har følgende universelle egenskap:

Proposisjon 1.3 *For en vilkårlig A-modul M, med en k-lineær derivasjon $D : A \to M$, fins en entydig gitt A-lineær homomorfi $\phi : \Omega_{A/k} \to M$, slik at $\phi \circ d = D$. Dessuten definerer denne egenskapen paret $(\Omega_{A/k}, d)$ entydig (opp til isomorfi).*

Bevis: Vi viser først at elementene $\{d(y) : y \in A\}$ genererer hele $\Omega_{A/k}$ som A-modul: La $a \in \Omega_{A/k}$, da er $a = \bar{b}$ for en $b \in I$, og b har formen $b = \sum x_j \otimes y_j$, der $x_j, y_j \in A$, og $m(b) = \sum x_j y_j = 0$. Vi har nå at $\sum x_j(\overline{1 \otimes y_j - y_j \otimes 1}) = \sum \overline{x_j \otimes y_j} - \sum \overline{x_j y_j \otimes 1} = \bar{b} = a$, så det følger at $a = \sum x_j d(y_j)$. Elementer av formen $d(y)$ for $y \in A$ genererer derfor $\Omega_{A/k}$ som A-modul. Anta så at M er en A-modul, $D : A \to M$ er k-derivasjon. Vi ønsker da å finne en A-lineær homomorfi $\phi : \Omega_{A/k} \to M$, slik at $\phi \circ d = D$. En slik homomorfi må tilfredstille $\phi(d(x)) = D(x)$ for alle $x \in A$. Siden elementer av typen $d(a)$ for $a \in A$ genererer $\Omega_{A/k}$ som A-modul, finnes det kun en kandidat til avbildningen ϕ, definert ved at $\phi(\sum x_i d(y_i)) = \sum x_i D(y_i)$. Vi må vise at dette er en veldefinert avbildning: Det er det samme som å vise at for ethvert element $a = \sum x_i \otimes y_i \in I^2$, er $\sum x_i D(y_i) = 0$. Men anta at vi har gitt to elementer $\sum x_i \otimes y_i, \sum z_j \otimes w_j \in I$, da er $\sum x_i y_i = \sum z_j w_j = 0$. Produkter av elementer av denne typen genererer I^2, og har formen

$$\sum_i (x_i \otimes y_i) \sum_j (z_j \otimes w_j) = \sum_{i,j} (x_i z_j \otimes y_i w_j)$$

Dersom vi anvender ϕ på slike produkter, får vi

$$\sum_{i,j} x_i z_j D(y_i w_j) = \sum_{i,j} x_i z_j (y_i D(w_j) + w_j D(y_i)) = 0$$

Dette betyr at ϕ er veldefinert, og vi har dermed en entydig gitt A-lineær homomorfi $\phi : \Omega_{A/k} \to M$, med $\phi \circ d = D$.

La $\mathbf{C}$ være en kategori, slik at objektene i kategorien er par (M, D), der M er en A-modul, $D : A \to M$ en k-lineær derivasjon, og slik at en morfi mellom parene (M, D) og (N, E) er en A-lineær homomorfi $\phi : M \to N$, slik at $\phi \circ D = E$. Det er nå klart at paret $(\Omega_{A/k}, d)$ er et objekt i denne kategorien, og vi har så langt vist at for et vilkårlig objekt (M, D) i kategorien, så finnes en entydig morfi $\phi : (\Omega_{A/k}, d) \to (M, D)$. Det følger nå umiddelbart at dersom det finnes et annet objekt (U, e) i kategorien, som også har denne egenskapen, så er $(\Omega_{A/k}, d) \cong (U, e)$ i kategorien $\mathbf{C}$. Opp til isomorfi i denne kategorien, er derfor paret $(\Omega_{A/k}, d)$ entydig bestemt.

$\square$

Resultatet gir en naturlig isomorfi $Der_k(A, M) \cong Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$ av A-moduler for hver modul M over A. Hvis $\delta \in Der_k(A, M)$, vil vi ofte skrive ϕ_δ for den tilsvarende homomorfien i $Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$. For et element i $\Omega_{A/k}$ på formen $d(a)$, for en $a \in A$, vil vi for enkelhets skyld skrive da. Med denne notasjonen kan vi definere en konneksjon:

Definisjon 1.6 *En konneksjon på en modul M er en k-lineær homomorfi $\nabla : M \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$, slik at*

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + m \otimes da$$

for alle $a \in A$, $m \in M$.

La M være en endelig generert A-modul, og anta at det eksisterer en konneksjon $\nabla : M \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$ på M. Da induserer denne konneksjonen en avbildning fra $Der_k(A)$ og inn i $End_k(M)$, som vi også vil kalle ∇: For hver $\delta \in Der_k(A)$, betrakt den tilsvarende A-modul homomorfien $\phi_\delta \in Hom_A(\Omega_{A/k}, A)$. Denne homomorfien induserer en A-lineær avbildning $id_M \otimes_A \phi_\delta : M \otimes_A \Omega_{A/k} \to M \otimes_A A$. Vi har en opplagt isomorfi av A-moduler $\eta : M \otimes_A A \to M$ for hver M, så dette gir oss en avbildning $\eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta) \circ \nabla : M \to M$. Denne avbildningen er k-lineær, siden η og $id_M \otimes_A \phi_\delta$ er A-lineære, og ∇ er k-lineær. Vi får på denne måten avbildningen $\nabla : Der_k(A) \to End_k(M)$ ved at $\nabla(\delta) = \eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta) \circ \nabla$. Denne tilordningen er A-lineær, fordi tilordningen $\delta \mapsto \phi_\delta$ er A-lineær, tilordningen $\phi \mapsto id_M \otimes_A \phi$ er A-lineær, og η er A-lineær. Vi har altså en A-lineær avbildning $\nabla : Der_k(A) \to End_k(M)$. Vi kaller ofte bildet $\nabla(\delta)$ for ∇_δ. For vilkårlig $a \in A$, $m \in M$ har vi dessuten

$$\begin{aligned}
\nabla_\delta(am) &= \eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta) \circ \nabla(am) \\
&= \eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta)(a\nabla(m) + m \otimes da) \\
&= \eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta)(a\nabla(m)) + \eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta)(m \otimes da) \\
&= a\eta \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta) \circ \nabla(m) + \eta(m \otimes \delta(a)) \\
&= a\nabla_\delta(m) + \delta(a)m
\end{aligned}$$

Dette motiverer oss til å gi følgende definisjon:

Definisjon 1.7 *En D-konneksjon på M, for en undermodul $D \subseteq Der_k(A)$ og en A-modul M, er en A-lineær avbildning $\nabla : D \to End_k(M)$, slik at for hver $\delta \in D$, er følgende oppfylt*

$$\nabla(\delta)(am) = a\nabla(\delta)(m) + \delta(a)m$$

for alle $a \in A, m \in M$. En D-konneksjon på M kalles ofte en kovariant derivasjon.

Vi kan nå reformulere vårt tidligere utsagn ved å si at en vilkårlig konneksjon på en modul M induserer en $Der_k(A)$-konneksjon på M. Det motsatte trenger ikke alltid å være tilfellet, og i den generelle situasjonen er det følgende resultat det beste vi kan få til:

Proposisjon 1.4 *Det er en 1-1 korrespondanse mellom konneksjoner på M og $Der_k(A)$-konneksjoner på M hvis A er en glatt k-algebra.*

Bevis: Vi vet fra [Ha, s. 177] at hvis A er en glatt k-algebra, så er $\Omega_{A/k}$ en fri A-modul. Generelt har vi at $Der_k(A) \cong Hom_A(\Omega_{A/k}, A) = \Omega^*_{A/k}$. Men siden $\Omega_{A/k}$ er A-fri, er opplagt $\Omega^{**}_{A/k} = \Omega_{A/k}$. Dette impliserer dermed at $\Omega_{A/k} \cong Hom_A(Der_k(A), A)$, og vi har

$$\begin{aligned} Hom_A(Der_k(A), End_k(M)) &\cong Hom_A(Der_k(A), A) \otimes_A End_k(M) \\ &\cong \Omega_{A/k} \otimes_A End_k(M) \\ &\cong Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k}) \end{aligned}$$

og derivasjonsegenskap bevares opplagt ved disse isomorfiene. Det følger derfor at dette er en slik 1-1 korrespondanse mellom konneksjoner på M og $Der_k(A)$-konneksjoner på M.

$\square$

Vi ønsker å definere krumning for konneksjoner. For å kunne gjøre dette, trenger vi noen flere begreper: Det første er begrepet en k-Lie algebra, og vi gir følgende definisjon:

Definisjon 1.8 *En k-Lie algebra er et k-vektorrom $\mathbf{g}$, sammen med et Lie-produkt på $\mathbf{g}$, som vi skriver $[-,-] : \mathbf{g} \wedge \mathbf{g} \to \mathbf{g}$, slik at følgende er oppfylt*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

for alle $x, y, z \in \mathbf{g}$. En homomorfi av k-Lie algebraene $\mathbf{g}$ og $\mathbf{g}'$ er en k-lineær avbildning $\phi : \mathbf{g} \to \mathbf{g}'$, slik at følgende er oppfylt

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

for alle $x, y \in \mathbf{g}$.

Man ser umiddelbart at $End_k(M)$ er en k-Lie algebra under Lie-produktet $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. Dessuten er $Der_k(A)$ en k-Lie algebra under det samme Lie-produktet, fordi dersom δ, η er to derivasjoner, så er $\delta \circ \eta - \eta \circ \delta$ også en derivasjon. (Dette kan betraktes som en k-Lie underalgebra av $End_k(A)$).

Vi er imidlertid spesielt interessert i k-Lie algebraer som samtidig er A-moduler. Vi definerer:

Definisjon 1.9 *Et Lie-Cartan par er et par $(\mathbf{g}, \rho)$, slik at $\mathbf{g}$ er en A-modul og en k-Lie algebra, og $\rho : \mathbf{g} \to Der_k(A)$ er en A-modul homomorfi og dessuten en k-Lie algebra homomorfi. Vi sier at ρ er en virkning av $\mathbf{g}$ på A, ved at $(g, a) \mapsto \rho(g)(a)$ for $g \in \mathbf{g}$, $a \in A$.*

Vi har et opplagt Lie-Cartan par, nemlig paret $(Der_k(A), id)$. Det er også klart at dersom $D \subseteq Der_k(A)$ samtidig er en A-undermodul og en k-Lie underalgebra, så er (D, id) et Lie-Cartan par.

Vi er nå i posisjon til å definere krumning. Anta at $D \subseteq Der_k(A)$ slik at (D, id) er et Lie-Cartan par, og at ∇ er en D-konneksjon på M. Vi har da en avbilning $R_\nabla : D \times D \to End_k(M)$, gitt ved at $R_\nabla(\delta, \eta) = [\nabla_\delta, \nabla_\eta] - \nabla_{[\delta,\eta]}$ for $\delta, \eta \in D$. Dette er en veldefinert avbildning, siden $End_k(M)$ og D er k-Lie algebraer. For alle $\delta, \eta \in D$, $a \in A$, $m \in M$ har vi:

$$\begin{aligned}
R_\nabla(\delta,\eta)(am) &= \nabla_\delta(\nabla_\eta(am)) - \nabla_\eta(\nabla_\delta(am)) - \nabla_{\delta\eta-\eta\delta}(am) \\
&= \nabla_\delta(\eta(a)m + a\nabla_\eta(m)) - \nabla_\eta(\delta(a)m + a\nabla_\delta(m)) \\
&\quad - (\delta\eta - \eta\delta)(a)m - a\nabla_{[\delta,\eta]}(m) \\
&= \eta(a)\nabla_\delta(m) + \delta\eta(a)m + a\nabla_\delta\nabla_\eta(m) + \delta(a)\nabla_\eta(m) \\
&\quad - \delta(a)\nabla_\eta(m) - \eta\delta(a)m - a\nabla_\eta\nabla_\delta(m) - \eta(a)\nabla_\delta(m) \\
&\quad - \delta\eta(a)m + \eta\delta(a)m - a\nabla_{[\delta,\eta]}(m) \\
&= a(\nabla_\delta\nabla_\eta(m) - \nabla_\eta\nabla_\delta(m) - \nabla_{[\delta,\eta]}) \\
&= aR_\nabla(\delta,\eta)
\end{aligned}$$

Det følger da at $R_\nabla(\delta, \eta) \in End_A(M)$ for alle $\delta, \eta \in D$. Dessuten har vi

$$\begin{aligned}
R_\nabla(\eta,\delta) &= \nabla_\eta\nabla_\delta - \nabla_\delta\nabla_\eta - \nabla_{\eta\delta-\delta\eta} \\
&= -(\nabla_\delta\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\delta - \nabla_{\delta\eta-\eta\delta} \\
&= -R_\nabla(\delta,\eta)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
R_\nabla(a\delta,\eta) &= \nabla_{a\delta}\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_{a\delta} - \nabla_{a\delta\eta-\eta(a\delta)} \\
&= a\nabla_\delta\nabla_\eta - \nabla_\eta(a\nabla_\delta) - \nabla_{a\delta\eta-a\eta\delta-\eta(a)\delta} \\
&= a\nabla_\delta\nabla_\eta - \eta(a)\nabla_\delta - a\nabla_\eta\nabla_\delta - a\nabla_{\delta\eta-\eta\delta} + \eta(a)\nabla_\delta \\
&= aR_\nabla(\delta,\eta)
\end{aligned}$$

for alle $\delta, \eta \in D$, $a \in A$. Det følger nå at $R_\nabla : D \times D \to End_A(M)$ er en A-bilineær avbildning, og den gir derfor opphav til en entydig A-lineær avbildning $D \otimes_A D \to End_A(M)$ slik at $\delta \otimes \eta \mapsto R_\nabla(\delta, \eta)$. Men siden alle elementer av formen $\delta \otimes \eta + \eta \otimes \delta$ ligger i kjernen til denne avbildningen, induseres en avbildning (som vi også kaller R_∇) fra $D \wedge_A D$ og inn i $End_A(M)$. Vi kan derfor gi følgende definisjon:

Definisjon 1.10 *For en A-modul M, en delmengde $D \subseteq Der_k(A)$ slik at (D, id) er et Lie-Cartan par, og en D-konneksjon ∇ på M, er krumningen til ∇ den A-lineære avbildingen*

$$R_\nabla : D \wedge_A D \to End_A(M)$$

beskrevet ovenfor. Dersom ∇ er en konneksjon på M, er krumningen til ∇ gitt som krumningen til den induserte $Der_k(A)$-konneksjonen på M.

Det skal senere vise seg at D-konneksjoner med krumning $R_\nabla = 0$ er av spesiell interesse. Vi definerer derfor

Definisjon 1.11 *En D-konneksjon ∇ på M er integrabel hvis $R_\nabla(\delta, \eta) = 0$ for alle $\delta, \eta \in D$. En konneksjon på M er integrabel hvis den induserte $Der_k(A)$-konneksjonen på M er integrabel.*

1.2 Kodaira-Spencer klassen c(M)

Vi ønsker å bestemme hvilke betingelser som finnes på paret (A, M) for at det skal eksistere en konneksjon på M. Det viser seg at dette er et problem som involverer deformasjonsteori for moduler, og vi trenger derfor noen resultater fra denne teorien.

Anta at R, S er to vilkårlige k-algebraer, og $\pi : R \to S$ er en k-algebra homomorfi. La M_S være en vilkårlig S-modul, da er M_S en R-modul via π. Dessuten ser vi at dersom N er R-modul, $\eta : N \to M_S$ er en R-modul homomorfi, så induseres en naturlig avbildning $\eta^* : N \otimes_R S \to M_S$. Denne avbildningen er gitt ved at $\eta^* = m \circ (\eta \otimes_R id_S)$, der $m : M_S \otimes_R S \to M_S$ er multiplikasjonsavbildningen definert ved at $m \otimes s \mapsto sm$ for hver $s \in S$ og hver $m \in M_S$. Vi definerer:

Definisjon 1.12 *En løfting av M_S til R er en R-modul N sammen med en R-modul homomorfi $\eta : N \to M_S$, slik at følgende betingelser er oppfylt:*
(1) $\eta^* : N \otimes_R S \to M_S$ er en isomorfi
(2) $Tor_1^R(N, S) = 0$
Vi sier videre at to løftinger (N, η) og (N', η') er isomorfe dersom det finnes en isomorfi av R-moduler $\phi : N \to N'$ slik at $\eta = \phi \circ \eta'$.

Definisjon 1.13 *En mengde U er en torsor over en abelsk gruppe V dersom det finnes en avbildning $\psi : U \times V \to U$, slik at at den induserte avbildningen $v \mapsto \psi(u, v)$ er en bijeksjon for hver $u \in U$. Vi skriver ofte $u + v$ istedet for $\psi(u, v)$.*

Anta at vi har gitt en surjektiv homomorfi av k-algebraer $\pi : R \to S$, og dessuten at $(\ker \pi)^2 = 0$. (Vi sier at en morfi er liten dersom den siste betingelsen er oppfylt). La M_S være en S-modul. Fra en generell deformasjonsteori for moduler, gitt i [La2, s. 26-29], har vi i denne situasjonen følgende resultat:

Proposisjon 1.5 *Det fins et element $o(M_S, \pi) \in Ext_S^2(M_S, M_S \otimes_S \ker(\pi))$ som er entydig gitt, slik at $o(M_S, \pi) = 0$ hvis og bare hvis det finnes en løfting av M_S til R. Dette elementet kalles obstruksjonen for å løfte M_S til R. Dersom det finnes en slik løfting, er mengden av isomorfi-klasser av løftinger en torsor over $Ext_S^1(M_S, M_S \otimes_S \ker(\pi))$.*

La oss returnere til vår situasjon, så la paret (A, M) være gitt. Vi har allerede nevnt konstruksjonen av $\Omega_{A/k}$, og vi ser at denne gir oss en avbildning av k-algebra homomorfier $\pi : A \otimes_k A/I^2 \to A$ slik at $\overline{a \otimes b} \mapsto ab$. Vi setter $B = A \otimes_k A/I^2$, da gir dette oss en surjektiv homomorfi av k-algebraer $\pi : B \to A$, med $\ker(\pi) = \Omega_{A/k}$. Siden $(\ker \pi)^2 = 0$, er morfien π liten.

Vi minner om at det finnes to naturlige seksjoner av $m : A \otimes_k A \to A$, $i_k : A \to A \otimes_k A$ for $k = 1, 2$. Hver av disse gir opphav til seksjoner av π, så det finnes to naturlige A-modul strukturer på B. Vi kan derfor definere $i_k^* M = M \otimes_{i_k} B$ for $k = 1, 2$, via disse A-modul strukturene til B, og vi får dermed to B-moduler $i_1^* M$, $i_2^* M$. Det finnes dessuten homomorfier $\eta_k : i_k^* M \to M$, for $k = 1, 2$, gitt ved at $\eta_1(m \otimes b) = \eta_2(m \otimes b) = \pi(b)m$.

Lemma 1.1 *For $k = 1, 2$, er paret $(i_k^* M, \eta_k : i_k^* M \to M)$ en løfting av M til B.*

Bevis: Vi har en opplagt isomorfi $\eta_k \otimes_B id_A : i_k^* M \otimes_B A \cong M$ siden i_k er seksjoner av π. Det er derfor nok å vise at $Tor_1^B(i_k^* M, A) = 0$: La (L_i, d_i) være en A-fri oppløsning av M. Da er $(L_i \otimes_{i_k} B, d_i \otimes_{i_k} id_B)$ en B-fri oppløsning av $i_k^* M = M \otimes_{i_k} B$, og vi kan tensorere denne oppløsningen med A over B, og $Tor_n^B(i_k^* M, A)$ vil være n'te kohomologi til dette komplekset. Men siden i_k er seksjon av π, følger det at dette komplekset er den opprinnelige oppløsningen av M, så vi har at $Tor_1^B(i_k^* M, A) = 0$.

□

Det finnes altså to naturlige løftinger av M til B, som svarer til de to naturlige seksjonene av π. Fra proposisjon 1.5 følger det derfor at vi til hvert par (A, M) kan tilordne et entydig element i $Ext_A^1(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$. Vi definerer derfor:

Definisjon 1.14 *Kodaira-Spencer klassen til M er det entydig bestemte elementet $c(M) = i_1^* M - i_2^* M \in Ext_A^1(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$.*

La $(L_\bullet, d_\bullet)$ være fri oppløsning av M, da er $L_p = A^{n_p}$ for hver p. Siden $d_p : L_{p+1} \to L_p$ er A-lineær, har den form som en matrise (a_{ij}^p) med hver $a_{ij}^p \in A$. Hver av de to løftingene har en B-fri oppløsning

$$0 \leftarrow i_k^* M \leftarrow B^{n_0} \overset{d_0^k}{\leftarrow} B^{n_1} \leftarrow \dots$$

der d_i^p er matrisen gitt ved $(i_k(a_{ij}^p))$ for hver $p \geq 0$. Dette er oppløsningene svarende til $(L_\bullet \otimes_{i_k} B, d_\bullet \otimes_{i_k} id_B)$. Avbildningen $d_0^1 - d_0^2 : B^{n_1} \to B^{n_0}$ gir opphav til et element $\phi \in H^1(Hom_A(L_\bullet, M \otimes \Omega_{A/k})$. På den ene siden er dette nettopp elementet $c(M) = i_1^* M - i_2^* M$, fordi det svarer til $d_\bullet \otimes_{i_1} id - d_\bullet \otimes_{i_2} id$. På den andre siden er $d_0^1 - d_0^2 = (da_{ij})$ som matrise. Det følger derfor at Kodaira-Spencer klassen $c(M)$ er elementet i $Ext_A^1(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$ som svarer til den A-lineære avbildningen $(da_{ij}) : L_1 \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$.

Vi ønsker nå å innføre Hochschild-kohomologi, fordi Kodaira-Spencer klassen er et element i en kohomologi-gruppe for denne kohomologien. La derfor A være en vilkårlig k-algebra, og P en A-bimodul. Vi danner Hochschild-komplekset $(C^{\bullet}(A,P), d^{\bullet})$ på følgende måte: La hver gruppe i komplekset ha formen $C^n(A,P) = Hom_k(\bigotimes_k^n A, P)$ for $n \geq 0$. På grunn av egenskaper til tensor-produktet, kan vi identifisere hvert element $x \in C^n(A,P)$ med en k-multilineær avbildning $\phi_x : A^n \to P$. Når vi benytter denne identifikasjonen, kan vi beskrive differensialene $d^n : C^n(A,P) \to C^{n+1}(A,P)$ på følgende måte: La $\phi \in C^n(A,P)$, og la $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$. Da er $d^n\phi$ gitt ved

$$\begin{aligned}(d^n\phi)(a_1,\ldots,a_{n+1}) &= a_1\phi(a_2,\ldots,a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\phi(a_1,\ldots,a_ia_{i+1},\ldots,a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1}\phi(a_1,\ldots,a_n)a_{n+1}\end{aligned}$$

Dette er opplagt en k-multi lineær avbildning, så d^n er en A-modul homomorfi for $n \geq 0$. Man kan dessuten vise at dette gir et kompleks, ved å regne ut at $d^{n+1} \circ d^n = 0$ for alle $n \geq 0$. Vi definerer da:

Definisjon 1.15 *Hochschild-komplekset til A med verdier i P er komplekset* $(C^{\bullet}(A,P), d^{\bullet})$ *definert ovenfor. Den tilsvarende Hochschild-kohomologi av orden n er dermed n'te kohomologi av dette Hochschild-komplekset, og vi skriver* $HH^n(A,P) = H^n(C^{\bullet}(A,P), d^{\bullet}) = \ker(d^n)/im(d^{n-1})$.

De første kohomologi-gruppene er gitt på følgende måte: Gruppene i komplekset er definert slik at $C^0(A,P) = P$, $C^1(A,P) = Hom_k(A,P)$ og $C^2(A,P) = Hom_k(A \otimes_k A, P)$. De første differensialene er gitt ved at $d^0(p)(a_1) = a_1p - pa_1$, og $d^1(\phi)(a_1,a_2) = a_1\phi(a_2) - \phi(a_1a_2) + \phi(a_1)a_2$ for $p \in P, \phi \in Hom_k(A,P), a_1, a_2 \in A$. For kohomologi-gruppene får vi da $HH^0(A,P) = \ker(d^0) = \{p \in P : ap - pa = 0 \text{ for alle } a \in A\}$, og at $HH^1(A,P) = \ker(d^1)/im(d^0) = Der_k(A,P)/Der_0$. Den siste identiteten kommer fram ved at vi har følgende relasjoner:

$$\begin{aligned}\ker(d^1) &= \{\phi \in Hom_k(A,P) : \phi(ab) = a\phi(b) + \phi(a)b \text{ for alle } a, b \in A\} \\ &= Der_k(A,P) \\ im(d^0) &= \{\phi \in Hom_k(A,P) : \phi(a) = ap - pa \text{ for en } p \in P\} \\ &= Der_0\end{aligned}$$

Vi ønsker å betrakte det spesielle tilfellet der M, N er to vilkårlige A-moduler, og $P = Hom_k(M,N)$. La $a \in A$, og $\phi \in Hom_k(M,N)$, og betrakt $a\phi, \phi a$ som k-lineære avbildninger fra M til N på den opplagte måten. Dette gir $Hom_k(M,N)$ en A-bimodul struktur. Vi har $HH^0(A,P) = Hom_A(M,N)$. Dessuten kan vi vise følgende lemma:

Lemma 1.2 $HH^1(A, Hom_k(M,N)) \cong Ext^1_A(M,N)$

Bevis: Vi minner om at $Ext^1_A(M,N)$ kan beskrives som mengden av ekvivalensklasser av ekstensjoner (eller utvidelser) på følgende måte: En ekstensjon av M med N er en kort eksakt sekvens

$$0 \to N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \to 0$$

av A-moduler, og to slike ekstensjoner (E, ϕ, ψ) og (E', ϕ', ψ') er ekvivalente dersom det finnes en isomorfi $\theta : E \to E'$ slik at alle diagrammene kommuterer. I vårt tilfelle er A en k-algebra, så M, N, E er spesielt k-vektorrom, og morfiene er spesielt morfier av k-vektorrom. Vi har derfor at $E = M \oplus N$ som k-vektorrom, og morfiene er k-lineære avbildninger, gitt på følgende måte: $\phi(n) = (0, n)$ for $n \in N$, og $\psi(m, n) = m$ for $m \in M$, $n \in N$. En ekstensjon av M med N er derfor et valg av A-modul struktur på E slik at disse morfiene blir A-lineære.

For vilkårlig $a \in A, n \in N$, er $\phi(an) = (0, an) = a\phi(n) = a(0, n)$, så vi må ha $a(0, n) = (0, an)$. Dessuten er $\psi(a(m, 0)) = a\psi(m, 0) = am$. Vi har da $a(m, 0) = (am, \eta(a, m))$, for en $\eta \in Hom_k(A, Hom_k(M, N))$. Det følger at $a(m, n) = a(m, 0) + a(0, n) = (am, \eta(a, m)) + (0, an) = (am, an + \eta(a, m))$. Vi må dessuten stille følgende krav: $(ab)(m, n) = a(b(m, n))$. Dette gir

$$\begin{aligned} ab(m,n) &= (abm, abn + \eta(ab, m)) = a(bm, bn + \eta(b, m)) \\ &= (abm, abn + a\eta(b, m) + \eta(a, bm)) \end{aligned}$$

så $\eta(ab, m) = a\eta(b, m) + \eta(a, bm)$. Dette er nøyaktig betingelsen for at $\eta \in Der_k(A, Hom_k(M, N))$. Vi har derfor en surjektiv, A-lineær avbildning $Der_k(A, Hom_k(M, N)) \to Ext^1_A(M, N)$.

Vi ønsker å finne kjernen i denne avbildningen: La derfor (E, ϕ, ψ) og (E', ϕ', ψ') være to ekstensjoner, svarende til $\eta, \eta' \in Der_k(A, Hom_k(M, N))$. Anta dessuten de to ekstensjonene er ekvivalente, så det finnes en A-lineær isomorfi $\theta : E \to E'$ slik at alle diagrammer kommuterer. Da har vi følgende ligninger: $\theta \circ \phi(n) = \phi'(n)$, og $\psi' \circ \theta(m, 0) = \psi(m, 0)$, så $\theta(0, n) = (0, n)$ og $\theta(m, 0) = (m, \gamma(m))$ for en $\gamma \in Hom_k(M, N)$. Dermed må θ ha formen $\theta(m, n) = (m, n + \gamma(m))$. Siden θ er A-lineær, får vi følgende tilleggs-betingelser på γ:

$$\begin{aligned} \theta(a(m,n)) &= \theta(am, an + \eta(a, m)) = (am, an + \eta(a, m) + \gamma(am)) \\ &= a\theta(m, n) = a(m, n + \gamma(m)) = (am, an + a\gamma(m) + \eta'(a, m)) \end{aligned}$$

Dette betyr at $\eta(a, m) + \gamma(am) = a\gamma(m) + \eta'(a, m)$. Da må $\eta - \eta'$ ha formen $(\eta - \eta')(a, m) = a\gamma(m) - \gamma(am) = d^0(\gamma)(a)$, så $\eta - \eta' \in im(d^0)$. Det følger dermed at kjernen i vår avbildning er $im(d^0) = Der_0$, og derfor har vi at $Ext^1_A(M, N) \cong HH^1(A, Hom_k(M, N))$ ved en kanonisk isomorfi.

□

For en A-bimodul P, har vi følgende eksakte sekvens av A-moduler:

$$0 \to HH^0(A,P) \to P \stackrel{d^0}{\to} Der_k(A,P) \to HH^1(A,P) \to 0$$

For det spesielle tilfellet $P = Hom_k(M,N)$, gir dette følgende eksakte sekvens:

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_A(M,N) &\to Hom_k(M,N) \\ \stackrel{d^0}{\to} Der_k(A, Hom_k(M,N)) &\to Ext^1_A(M,N) \to 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vi betrakter A-modulen $N = M \otimes_A \Omega_{A/k}$. Da har vi et spesielt element $c \in Der_k(A, Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k}))$ gitt ved $c(a)(m) = m \otimes da$ for alle $a \in A$, $m \in M$. Vi har følgende lemma:

Lemma 1.3 *Elementet $\bar{c} \in Ext^1_A(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$ er Kodaira-Spencer klassen $c(M)$.*

Bevis: Se [La2, s. 43].

□

Kodaira-Spencer klassen $c(M)$ gir oss en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for eksistens av en konneksjon på M, for vi kan vise følgende viktige resultat:

Teorem 1.1 *Det finnes en konneksjon på M hvis og bare hvis Kodaira-Spencer klassen $c(M) = 0$.*

Bevis: Fra lemma 1.3 følger det at $c(M) = 0$ hvis og bare hvis elementet $c \in Der_k(A, Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$ kan skrives på formen $d^0(\phi)$ for et element $\phi \in Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$. Men da er $c(a) = d^0(\phi)(a) = a\phi - \phi a$, så $c(a)(m) = a\phi(m) - \phi(am)$. Vi kan dermed sette $\nabla = -\phi$, og vi har at $\nabla : M \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$ er k-lineær, med $\nabla(am) = a\nabla(m) + m \otimes da$. Det følger at det finnes en konneksjon på M hvis og bare hvis $c(M) = 0$.

□

Etter dette ser vi at Kodaira-Spencer klassen $c(M)$ er obstruksjonen for eksistens av konneksjoner på M.

1.3 Konneksjonene

Vi kjenner nå en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for eksistens av en konneksjon på M, i form av obstruksjonen $c(M)$. Det vil vise seg at eksistens av en konneksjon på M er en forholdsvis sterk betingelse på paret (A, M). Vi vil derfor istedet finne betingelser på paret (A, M) for å finne en D-konneksjon på M, for en A-undermodul $D \subseteq Der_k(A)$. Mer presist ønsker vi å finne den maksimale undermodul D, slik at det finnes en D-konneksjon på M.

La derfor paret (A, M) være gitt. Kodaira-Spencer klassen $c(M)$ gir opphav til en avbildning $g : Der_k(A) \to Ext^1_A(M, M)$ på følgende måte: La $\delta \in Der_k(A)$ være en derivasjon, den tilsvarer da en $\phi_\delta \in Hom_A(\Omega_{A/k}, A)$. Vi kan betrakte avbildningen $id_M \otimes_A \phi_\delta : M \otimes_A \Omega_{A/k} \to M \otimes_A A$, og dessuten sammensetningen av denne med den naturlige isomorfien $m : M \otimes_A A \to M$. Vi får da en A-lineær avbildning $m \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta) : M \otimes_A \Omega_{A/k} \to M$. Siden $Ext^1_A(P, -)$ er en kovariant funktor for hver A-modul P, induserer denne avbildning en A-modul homomorfi $\delta_* : Ext^1_A(M, M \otimes_A \Omega_{A/k}) \to Ext^1_A(M, M)$. Vi definerer nå $g(\delta) = \delta_*(c(M))$. Dette er en veldefinert avbildning, og kalles Kodaira-Spencer avbildningen.

Vi får $\delta' : Der_k(A, Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})) \to Der_k(A, End_k(M))$ for hver $\delta \in Der_k(A)$, ved at $\delta'(\eta)(a, m) = m \circ (id_M \otimes_A \phi_\delta) \circ \eta(a, m)$ for hver $\eta \in Der_k(A, Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k}))$. Dette gir oss følgende kommutative diagram:

$$
\begin{array}{rcl}
Der_k(A, Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})) & \to & Ext^1_A(M, M \otimes_A \Omega_{A/k}) \\
\downarrow \delta' & & \delta_* \downarrow \\
Der_k(A, End_k(M)) & \xrightarrow{\rho} & Ext^1_A(M, M) \\
\uparrow id & & \\
Der_k(A) & &
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Element $c \in Der_k(A, Hom_k(M, M \otimes_A \Omega_{A/k}))$, gitt ved at $c(a, m) = m \otimes da$, har egenskapen $\bar{c} = c(M)$. Dette gir oss $g(\delta) = \delta_*(c(M))$, så $g(\delta) = \rho \circ \delta'(c)$. Men $\delta'(c)(a, m) = \delta(a)m$. Altså er $\delta'(c) = \delta$ betraktet som elementer i $Der_k(A, End_k(M))$. Det følger derfor at $g = \rho \circ id$, der ρ er den naturlige avbildningen $Der_k(A, End_k(M)) \to Ext^1_A(M, M)$. Siden ρ opplagt er A-lineær avbildning, er g A-lineær.

Vi setter $\mathbf{V} = \ker(g) \subseteq Der_k(A)$. Dette kalles Kodaira-Spencer kjernen $\mathbf{V}$, og er opplagt en A-undermodul av $Der_k(A)$. Denne kjernen har følgende egenskap:

Proposisjon 1.6 *Kodaira-Spencer kjernen* $\mathbf{V}$ *danner sammen med inklusjonen* $\mathbf{V} \subseteq Der_k(A)$ *et Lie-Cartan par* $(\mathbf{V}, id)$.

Bevis: Vi har allerede vist at $\mathbf{V}$ er en A-undermodul av $Der_k(A)$. Det er derfor nok å vise at $\mathbf{V}$ er en k-Lie underalgebra av $Der_k(A)$. La derfor $\delta, \eta \in Der_k(A)$ være slik at $g(\delta) = g(\eta) = 0$. Vi kan betrakte derivasjonene som elementer i $Der_k(A, End_k(M))$, med $\delta, \eta \in \ker(\rho)$. Vi har tidligere vist at $\ker(\rho) = im\{End_k(M) \to Der_k(A, End_k(M))\}$, og dette er en k-Lie algebra. Det følger derfor at $[\delta, \eta] \in \ker(\rho)$, og dermed også i $\mathbf{V}$. Dermed er $(\mathbf{V}, id)$ et Lie-Cartan par.

$\square$

La $(L_\bullet, d_\bullet)$ være en fri oppløsning av M. Da er $L_k = A^{n_k}$, og hver $d_k : L_{k+1} \to L_k$ har form som en matrise (a^k_{ij}), der hver $a^k_{ij} \in A$. Vi minner om at $c(M) \in Ext^1_A(M, M \otimes_A \Omega_{A/k})$ er elementet definert av den A-lineære avbildningen $(da^0_{ij}) : L_1 \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$. Hver $\delta \in Der_k(A)$ gir en avbildning $m \circ (id \otimes \phi_\delta) : M \otimes_A \Omega_{A/k} \to M$, ved at $m \otimes da \mapsto \delta(a)m$. Dette gir nå opphav til avbildningen δ^*, som vi har nevnt tidligere. Elementet $c(M)$ avbildes nå på et element i $Ext^1_A(M, M)$ definert av matrise-avbildningen $(\phi_\delta \circ da^0_{ij})$. Men $\phi_\delta \circ d = \delta$, så dette er avbildningen $(\delta(a^0_{ij}))$. Siden $g(\delta) = \delta^*(c(M))$, er $g(\delta)$ elementet i $Ext^1_A(M, M)$ definert av $(\delta(a^0_{ij})$. Dette gir oss et eksplisitt uttrykk for $g(\delta)$ for hver $\delta \in Der_k(A)$.

La $\delta \in Der_k(A)$ være en vilkårlig derivasjon. Da er vi interessert i å finne en $\nabla_\delta \in End_k(M)$, slik at $\nabla_\delta(am) = a\nabla_\delta(m) + \delta(a)m$ for alle $a \in A$, $m \in M$. (Vi sier at $\nabla_\delta \in End_k(M)$ har derivasjonsegenskap dersom denne betingelsen er oppfylt). Vi har følgende lemma:

Lemma 1.4 *Det finnes en $\nabla_\delta \in End_k(M)$ med derivasjonsegenskap hvis og bare hvis $\delta \in \mathbf{V}$.*

Bevis: Avbildningen $\rho : Der_k(A, End_k(M)) \to Ext^1_A(M, M)$ i diagram 1.2 er en del av den lange, eksakte sekvensen 1.1. For en $\delta \in Der_k(A)$, er $\delta \in \mathbf{V}$ hvis og bare hvis det finnes en $\nabla_\delta \in End_k(M)$, med $a\nabla_\delta - \nabla_\delta a = \delta'(c)$. Det siste er imidlertid ekvivalent med at det finnes en $\nabla_\delta \in End_k(M)$ med derivasjonsegenskap.

$\square$

For en $\delta \in \mathbf{V}$, trenger vi dessuten å vite hvordan vi kan finne en slik ∇_δ. La derfor $(L_\bullet, d_\bullet)$ være en A-fri oppløsning av M, så $L_k = A^{n_k}$ for hver k, og $d_k : L_{k+1} \to L_k$ er en matrise (a^k_{ij}), der alle koeffisientene $a^k_{ij} \in A$, for hver $k \geq 0$. La $\delta \in Der_k(A)$ være en derivasjon, og la oss skrive $\delta_k : L_k \to L_k$ for avbildningen δ^{n_k}. Vi kaller dessuten den siste avbildningen i oppløsningen $\rho : L_0 \to M$. Tidligere har vi betraktet avbildningen $(\delta(a^0_{ij}) : L_1 \to L_0$, og satt $g(\delta) = \rho \circ (\delta(a^0_{ij}))$. Vi ser nå at avbildningen $(\delta(a^0_{ij})) = \delta_0 \circ d_0 - d_0 \circ \delta_1$. Siden $\rho \circ d_0 = 0$, følger det nå at $g(\delta) = \rho \circ \delta_1 \circ d_0$.

Vi har at $g(\delta) = 0$, siden $\delta \in \mathbf{V}$. Dette betyr at det fins en A-lineær $\phi : L_0 \to M$ slik at $\rho \circ \delta_0 \circ d_0 = \phi \circ d_0$. Men da kan vi sette $\psi = \rho \circ \delta_0 - \phi$. Da er $\psi : L_0 \to M$ en k-lineær avbildning, og $\psi \circ d_0 = 0$. Det betyr at ψ induserer en k-lineær avbildning $\psi' : M \to M$, slik at $\psi' \circ \rho = \psi$. Denne avbildningen oppfyller $\psi'(am) = a\psi'(m) + \delta(a)m$ for alle $a \in A$, $m \in M$, så $\nabla_\delta = \psi' \in End_k(M)$ har derivasjonsegenskap.

Siden $\mathbf{V}$ er en A-modul, er den opplagt et k-vektorrom. Vi kan derfor velge en basis for $\mathbf{V}$ som k-vektorrom og finne en $\nabla_\delta \in End_k(M)$ med derivasjonsegenskap for hver $\delta \in \mathbf{V}$. Dette definerer en k-lineær avbildning $\nabla : \mathbf{V} \to End_k(M)$, slik at $\nabla_\delta(am) = a\nabla_\delta(m) + \delta(a)m$ for alle $a \in A$, $m \in M$. Vi vil ofte referere til en slik avbildning som en k-lineær $\mathbf{V}$-konneksjon på M, selv om avbildningen i virkeligheten kun er en $\mathbf{V}$-konneksjon på M dersom den i tillegg er A-lineær.

Det er nå åpenbart at for hver A-undermodul $D \subseteq Der_k(A)$ som er slik at det eksisterer en D-konneksjon på M, så har vi $D \subseteq \mathbf{V}$. Det er da naturlig å spørre om hvilke betingelser man må ha på (A, M) for at det skal kunne finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Følgende proposisjon gir svaret på dette spørsmålet:

Proposisjon 1.7 *Det finnes et element $lc(M) \in Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ som er entydig gitt, og som er slik at det eksisterer en $\mathbf{V}$-konneksjon på M hvis og bare hvis $lc(M) = 0$. Elementet $lc(M)$ kalles obstruksjonen for eksistens av en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Hvis det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M, er dessuten mengden av $\mathbf{V}$-konneksjoner på M en torsor over $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. Hvert element i $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ kalles nå et potensial.*

Bevis: La $\nabla : \mathbf{V} \to End_k(M)$ være en vilkårlig k-lineær $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Betrakt da elementet Ψ, gitt ved $\Psi(a, \delta) = \nabla_{a\delta} - a\nabla_\delta \in End_k(M)$ for alle $a \in A$, $\delta \in \mathbf{V}$. Merk at $\Psi \in Der_k(A, Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M)))$, for vi har at $\Psi(a, \delta)(bm) = (\nabla_{a\delta}(bm) - a\nabla_\delta(bm) = b\Psi(a, \delta)(m)$, og dessuten $\Psi(ab, \delta) = \nabla_{ab\delta} - ab\nabla_\delta = \nabla_{ab\delta} - a\nabla_{b\delta} + a\nabla b\delta - ab\nabla_\delta = \Psi(a, b\delta) + a\Psi(b, \delta)$ for alle $a, b \in A$, $m \in M$, $\delta \in \mathbf{V}$. La $lc(M) = \overline{\Psi} \in Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. Dette er et veldefinert element, for la ∇, ∇' være to k-lineære $\mathbf{V}$-konneksjoner på M. Da er $\nabla - \nabla' : \mathbf{V} \to End_k(M)$ en k-lineær avbildning. Dessuten er $(\nabla - \nabla')(am) = a(\nabla - \nabla')(m)$ for alle $a \in A$, $m \in M$, så dette definerer et element i $Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M))$. La nå Ψ og Ψ' være de tilsvarende elementene i $Der_k(A, Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M)))$. Da er $\Psi - \Psi' = d^0(\nabla - \nabla')$, og derfor $\overline{\Psi - \Psi'} = 0$ som element i $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. Det følger at elementet $lc(M) \in Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ er veldefinert.

Vi må vise at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Men $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis det fins en $\eta \in Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M))$ slik at $d^0(\eta) = \Psi$, der Ψ er elementet som definerer $lc(M)$, svarende til den k-lineære $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇ på M. Dette betyr at for alle $a \in A$, $\delta \in \mathbf{V}$, så har vi relasjonen $\nabla_{a\delta} - a\nabla_\delta = a\eta(\delta) - \eta(a\delta)$, som er det samme som at $(\nabla + \eta)(a\delta) = a(\nabla + \eta)(\delta)$. Dette er igjen ekvivalent med at vi kan velge $\nabla' = \nabla + \eta : \mathbf{V} \to End_k(M)$ slik at ∇' er A-lineær, og slik at $\nabla'(\delta)$ har derivasjonsegenskap for alle $\delta \in \mathbf{V}$. Men dette betyr at ∇' er $\mathbf{V}$-konneksjon på M, så vi har nå vist at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Anta tilslutt at $\nabla, \nabla' : \mathbf{V} \to End_k(M)$ er $\mathbf{V}$-konneksjoner på M. Da kan vi betrakte $\eta = \nabla - \nabla' \in Hom_A(\mathbf{V}, End_k(M))$. Men dette elementet oppfyller $\eta(\delta)(am) = a\eta(\delta)(m)$ for alle $a \in A$, $m \in M$, $\delta \in \mathbf{V}$. Det følger at $\eta \in Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ er et potensiale. Anta så at ∇ er en $\mathbf{V}$-konneksjon på M, og η er et potensiale. Vi setter $\nabla' = \nabla + \eta$, da er $\nabla' : \mathbf{V} \to End_k(M)$ en A-lineær avbildning. Siden $\eta(\delta)$ er A-lineær og ∇_δ har derivasjonsegenskap for hver $\delta \in \mathbf{V}$, har $\nabla'(\delta)$ derivasjonsegenskap for hver $\delta \in \mathbf{V}$. Det følger at ∇' er $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Vi har dermed vist at mengden av $\mathbf{V}$-konneksjoner på M er en torsor over potensialene $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$.

□

Vi har dermed at den maksimale A-undermodulen $D \subseteq Der_k(A)$ som er slik at det finnes en D-konneksjon på M, er $\mathbf{V}$ hvis obstruksjonen $lc(M) = 0$, og en ekte undermodul av $\mathbf{V}$ i motsatt fall. Merk også at dersom $\mathbf{V}$ er en projektiv A-modul, så er $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M)) = 0$, og det finnes trivielt en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Til slutt noterer vi at beviset ovenfor ikke bare gir en betingelse for når det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M: Hvis det finnes en slik konneksjon, beskriver beviset eksplisitt hvordan denne kan konstrueres.

Anta at det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Siden $(\mathbf{V}, id)$ er et Lie-Cartan par, har det mening å snakke om krumningen til denne konneksjonen. Vi ønsker å beskrive de integrable $\mathbf{V}$-konneksjonene på M, og trenger følgende lemma:

Lemma 1.5 *For hver $\mathbf{V}$-konneksjon ∇ på M, finnes det en naturlig $\mathbf{V}$-konneksjon på $End_A(M)$ som kalles $ad\ \nabla$.*

Bevis: Vi konstruerer $ad\ \nabla : \mathbf{V} \to End_k(End_A(M))$ på følgende måte: For hver $\delta \in \mathbf{V}$, lar vi $(ad\ \nabla)(\delta)(\phi) = \nabla_\delta \circ \phi - \phi \circ \nabla_\delta$ for alle $\phi \in End_A(M)$. Da er $(ad\ \nabla)(\delta)(\phi) = ad\ \nabla_\delta(\phi) \in End_k(M)$. Dette elementet ligger i $End_A(M)$, da $(ad\ \nabla_\delta)(\phi)(am) = \nabla_\delta(a\phi(m)) - \phi(\nabla_\delta(am)) = a(ad\ \nabla_\delta)(\phi)(m)$ for alle $a \in A$, $m \in M$, så $ad\ \nabla_\delta : End_A(M) \to End_A(M)$ er en k-lineær avbildning. Vi får derfor $ad\ \nabla : \mathbf{V} \to End_k(End_A(M))$, og denne avbildningen er opplagt A-lineær: $(ad\ \nabla_{a\delta})(\phi) = \nabla_{a\delta} \circ \phi - \phi \circ \nabla_{a\delta} = a(ad\ \nabla_\delta)(\phi)$ for alle $a \in A$, $\delta \in \mathbf{V}$, $\phi \in End_A(M)$. Til slutt viser vi at denne avbildningen har derivasjonsegenskap: $(ad\ \nabla_\delta)(a\phi) = \nabla_\delta(a\phi) - a\phi(\nabla_\delta) = \delta(a)\phi + (ad\ \nabla_\delta)(\phi)$, for alle $a \in A$, $\delta \in \mathbf{V}$, $\phi \in End_A(M)$. Det følger av dette at avbildningen $ad\ \nabla : \mathbf{V} \to End_k(End_A(M))$ er en $\mathbf{V}$-konneksjon på M.

□

Vi ser spesielt at $\mathbf{V}$ virker på $End_A(M)$ via $ad\ \nabla$. Siden $\mathbf{V}$ er en k-Lie algebra, og dessuten virker på $End_A(M)$, har det mening å snakke om k-derivasjoner fra $\mathbf{V}$ inn i $End_A(M)$. La nå $Der_{k,A}(\mathbf{V}, End_A(M))$ betegne de potensialene som spesielt er k-derivasjoner. (Dette er altså de potensialene $A : \mathbf{V} \to End_A(M)$ som oppfyller den følgende versjon av Leibniz-regelen: $A([\delta, \eta]) = (ad\ \nabla_\delta)(A(\eta)) - (ad\ \nabla_\eta)(A(\delta))$). Vi har følgende resultat:

Proposisjon 1.8 *Anta at $End_A(M)$ er en kommutativ ring, og at det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon ∇^0 på M som er integrabel. Da er mengden av integrable $\mathbf{V}$-konneksjoner på M en torsor over $Der_k(\mathbf{V}, End_A(M))$.*

Bevis: Anta at $End_A(M)$ er en kommutativ ring. Vi har allerede vist at dersom ∇^0 er en integrabel $\mathbf{V}$-konneksjon på M, så er enhver annen $\mathbf{V}$-konneksjon på M på formen $\nabla = \nabla^0 + A$ for et potensiale A. Mengden av integrable $\mathbf{V}$-konneksjon på M er derfor en torsor over de potensialene A som er slik at $R_{\nabla^0+A} = 0$. La oss regne ut $R_{\nabla^0+A}(\delta, \eta)$ for $\delta, \eta \in \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} R_{\nabla^0+A}(\delta,\eta) &= [(\nabla^0 + A)(\delta), (\nabla^0 + A)(\eta)] - (\nabla^0 + A)[\delta,\eta] \\ &= R_{\nabla^0}(\delta,\eta) + [A(\delta), A(\eta)] - A[\delta,\eta] \\ &\quad + A_\delta \nabla_\eta + \nabla_\delta A_\eta - A_\eta \nabla_\delta - \nabla_\eta A_\delta \\ &= -A[\delta,\eta] + ad\ \nabla_\delta(A(\eta)) - ad\ \nabla_\eta(A(\delta)) \end{aligned}$$

Setter vi nå $R_{\nabla^0+A} = 0$, har vi at

$$A([\delta,\eta]) = ad\ \nabla_\delta(A(\eta)) - ad\ \nabla_\eta(A(\delta))$$

for alle $\delta, \eta \in \mathbf{V}$. Dette er oppfylt hvis og bare hvis A er derivasjon, så resultatet følger.

$\square$

Merk: Fra beviset følger det at hvis $End_A(M)$ ikke er en kommutativ ring, så er mengden av integrable konneksjoner en torsor over de potensialer som oppfyller følgende ligning:

$$A[\delta,\eta] = [A(\delta), A(\eta)] + ad\ \nabla_\delta(A(\eta)) - ad\ \nabla_\eta(A(\delta))$$

for alle $\delta, \eta \in \mathbf{V}$.

Kapittel 2

Eksemplene

Vi ønsker nå å gjøre endel kalkulasjoner for noen konkrete eksempler, for å k-largjøre den generelle teorien vi har utviklet i kapittel 1. Vi vil derfor se på en mye mer spesiell algebraisk situasjon enn vi har gjort så langt. Vi ønsker også å definere begrepet monodromi for denne spesielle algebraiske situasjonen. Til slutt vil vi velge ut ett eksempel som vi vil kalkulere med i kapittel 3.

2.1 Singularitetene

Teorien vi har utviklet så langt, gjelder i en svært generell algebraisk situasjon. Den er imidlertid lite studert når ringen A er singulær. Vi skal derfor i fortsettelsen begrense oss til den situasjon at A er en singulær k-algebra. Vi ønsker nå å bruke følgende notasjon: Vi sier at A har en isolert singularitet dersom den kun har ett singulært punkt, og at den er en hyperflate med en isolert singularitet dersom den i tillegg har formen $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f)$ for en $f \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Vi ønsker å kalkulere noen eksempler der A er en hyperflate med en isolert singularitet. Det viser seg at disse kalkulasjonene ikke er trivielle, selv når $\dim(A) = 1$, og vi er derfor interessert i betrakte slike singulære algebraer som er forholdsvis enkle. Merk imidlertid at vi ser på k-algebraer på formen $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f)$, og disse trenger ikke å være lokale eller komplette ringer. Vi har valgt å studere slike generelle k-algebraer, fordi vi er interessert i begreper som konneksjoner og monodromi. (Disse begrepene er ikke lokale begreper, og er ikke bestemt av det som skjer lokalt i det singulære punktet). I det algebraiske studiet av en singularitet er det imidlertid vanlig å betrakte den lokale komplette ringen B som framkommer ved å kompletere A i det singulære punktet. De fleste resultatene er derfor gitt for slike lokale, komplette ringer.

La oss nå innføre litt notasjon for moduler M over en vilkårlig ring A: Vi sier at en modul M er indekomposabel dersom $M = M_1 \oplus M_2$ medfører at $M = M_1$ eller $M = M_2$. For hver modul M kan vi dessuten betrakte den duale A-modulen $M^* = Hom_A(M, A)$, og det finnes generelt en naturlig A-modul homomorfi ϕ :

$M \to M^{**}$, som er gitt ved at $\phi(m)(\eta) = \eta(m)$ for alle $m \in M, \eta \in Hom_A(M, A)$. Vi sier nå at en modul M er refleksiv dersom den naturlige avbildningen $\phi : M \to M^{**}$ er en A-modul isomorfi. For en vilkårlig modul M finnes det en undermodul $T(M) = \{m \in M : Ann(m) \neq 0\}$, som kalles torsjonen til M. Vi sier at M er torsjonsfri dersom $T(M) = 0$. Til slutt sier vi at en modul M er maksimal Cohen-Macauley dersom høyden til M er lik Krull-dimensjonen til A.

Hvis B er den komplette, lokale ringen til en singularitet, så sier vi at singulariteten er simpel dersom det kun finnes endelig mange isomorfi-klasser av indekomposable, maksimalt Cohen-Macauley moduler over B. Dette er ikke den vanlige definisjonen, men et resultat gitt i [B-G-S]. Vi betrakter nå de simple kurve-singularitetene, det vil si de simple singularitetene av dimensjon 1. Disse er de enkleste singularitetene, og har blitt klassifisert fullstendig i [Arn]: Enhver simpel kurve-singularitet er av typen $B = k[[x, y]]/(f)$, for en $f \in k[[x, y]]$ beskrevet i følgende fullstendige liste:

Navn:	f:
A_n	$x^2 + y^{n+1}$ n=1,2,...
D_n	$x^2y + y^{n-1}$ n=4,5,...
E_6	$x^4 + y^3$
E_7	$x^3 + xy^3$
E_8	$x^5 + y^3$

Vi ønsker altså ikke å betrakte disse lokale, komplette ringene, men kan istedet se på de tilsvarende k-algebraene $A = k[x, y]/(f)$ for hver $f \in k[x, y]$ i listen ovenfor. Det følger nå lett at $B = \widehat{A}$, kompletteringen av A i det singulære punktet, siden kompletering er en eksakt funktor. For enkelhets skyld sier vi nå at det er k-algebraene $A = k[x, y]/(f)$ som er de simple kurve-singularitetene, og vi kaller singularitetene for henholdsvis A_n, D_n, E_6, E_7, E_8. I det som følger vil vi kun betrakte slike simple kurve-singulariteter.

2.2 Modulene

La nå k-algebraen $A = k[x, y]/(f)$ være gitt som en simpel kurve-singularitet, og betrakt de endelig-genererte modulene over A. Dette er en stor klasse av moduler, og vi ønsker å begrense denne. De fleste klassifiserings-resultater er gjort for moduler over den tilsvarende komplette ringen $B = k[[x, y]]/(f)$. Det vil vi gjøre nytte av når vi bestemmer hvilken klasse av moduler vi ønsker å betrakte. Merk også at over ringen B, er begrepene refleksiv modul, torsjonsfri modul, og maksimal Cohen-Macauley modul sammenfallende. Vi vil derfor fritt identifisere disse begrepene med hverandre.

Det første resultatet er at det kun finnes et endelig antall refleksive, indekomposable B-moduler, når $B = k[[x,y]]/(f)$ er den komplette ringen til en simpel kurve-singularitet, og disse er fullstendig klassifisert (se [G-K]). Vi skal ikke liste opp alle her, men senere velge ut noen fra denne listen som vi ønsker å arbeide videre med.

Hvis R er en vilkårlig ring, og $x \in R$, så er en matrise-faktorisering av x over R et par av R-linære avbildninger $\phi : R^n \to R^m$ og $\psi : R^m \to R^n$, slik at $\phi \circ \psi = xI_m$ og $\psi \circ \phi = xI_n$. For en slik matrise-faktorisering, betrakt ringen $S = R/(x)$ og de induserte avbildningene $\overline{\phi} : S^n \to S^m$ og $\overline{\psi} : S^m \to S^n$. Dette gir nå en sekvens:

$$0 \leftarrow coker(\overline{\phi}) \leftarrow S^m \xleftarrow{\overline{\phi}} S^n \xleftarrow{\overline{\psi}} S^m \leftarrow \dots$$

Dette er i det minste et kompleks, og hvis $(x)/(x)^2$ er fri over S, så er dette en S-fri oppløsning av $N = coker(\overline{\phi})$ (se [Eis, s. 49]). I så fall kaller vi dette den frie oppløsningen av $coker(\overline{\phi})$ indusert av matrise-faktoriseringen (ϕ, ψ).

Betrakt nå den simple kurve-singulariteten $B = k[[x,y]]/(f)$, og en indekomposabel, refleksiv modul N over B. Ifølge [Eis, s. 52], finnes da en B-fri oppløsning av N som er indusert av en matrise-faktorisering av f over $k[[x,y]]$. Dette betyr at de indekomposable, refleksive modulene over de simple kurve-singularitetene har spesielt enkle frie oppløsninger. For hver simpel kurve-singularitet $B = k[[x,y]]/(f)$, ønsker vi derfor kun å betrakte de indekomposable, refleksive modulene over B.

Dersom $B = k[[x,y]]/(f)$ er en simpel kurve-singularitet, finnes det altså en fullstendig liste over indekomposable, refleksive moduler over B, og disse har alle forholdsvis enkle B-frie oppløsninger. Vi ønsker imidlertid å betrakte den tilsvarende k-algebraen $A = k[x,y]/(f)$ i stedet for den komplette ringen $B = k[[x,y]]/(f)$, og moduler over A. Vi har i dette tilfellet ikke så pene resultater.

Det gjør imidlertid ikke så mye, fordi hver indekomposabel, refleksiv modul N over B gir opphav til en modul M over A på følgende måte: Vi vet at det finnes to $n \times n$-matriser ϕ, ψ med verdier i $k[[x,y]]$ som danner en matrise-faktorisering av f over $k[[x,y]]$, og som gir opphav til en B-fri oppløsning

$$0 \leftarrow N \leftarrow B^n \xleftarrow{\overline{\phi}} B^n \xleftarrow{\overline{\psi}} B^n \dots$$

av N. Det er nå lett å se at disse matrisene ϕ, ψ spesielt har verdier i $k[x,y]$ betraktet som en underring av $k[[x,y]]$, og (ϕ, ψ) er derfor også en matrise-faktorisering av f over $k[x,y]$. Som vi tidligere har sett, induserer dette et kompleks

$$0 \leftarrow coker(\overline{\phi}) \leftarrow A^n \xleftarrow{\overline{\phi}} A^n \xleftarrow{\overline{\psi}} A^n \leftarrow \dots$$

Komplekset er en oppløsning hvis $(f)/(f)^2$ er A-fri, og dette er opplagt tilfelle hvis $f \in k[x,y]$ er irredusibel. Vi kan nå sette $M = coker(\overline{\phi})$, som gir oss en A-modul (uavhengig av om komplekset faktisk er en oppløsning). Dersom man tensoriserer den siste sekvensen med B over A, er det lett å se at man får tilbake den B-frie oppløsningen av N. Det betyr at $M \otimes_A B \cong N$, så $\widehat{M} = N$.

Vi har nå vist at hver refleksiv, indekomposabel modul N over B gir opphav til en modul M over A. Hvis $f \in k[x,y]$ er irredusibel, har modulen M en fri oppløsning som er spesielt enkel, nemlig oppløsningen som er gitt ovenfor. Dette gir oss en klasse av moduler M over hver simpel kurve-singularitet $A = k[x,y]/(f)$. Vi ønsker fra nå av kun å betrakte moduler av denne typen.

2.3 Et eksempel

Blant disse simple kurve-singularitetene A, og A-modulene M som vi nå har spesifisert, velger vi ett eksempel som vi vil kalkulere med i kapittel 3.

Blant de simple kurve-singularitetene, velger vi E_6, som svarer til at k-algebraen $A = k[x,y]/(x^4+y^3)$. Hovedgrunnen til at vi velger akkurat denne er at $f = x^4+y^3$ er et irredusibelt polynom, og at A derfor er et integritetsområde. Dette betyr blant annet at $X = Spec(A)$ er irredusibel, og at enhver modul over A har en veldefinert rang. Dessuten er E_6 den nest enkleste av de irredusible, simple kurve-singularitetene.

Den enkleste av disse irredusible singularitetene er A_2-singulariteten, gitt ved $f = x^2 + y^3$. Grunnen til at vi ikke bruker den, er at den ikke er tilstrekkelig interessant: I klassifiseringen av de refleksive, indekomposable modulene over den komplette, lokale ringen $B = k[[x,y]]/(x^2+y^3)$ (se [G-K]), finnes det kun moduler av rang 1. For E_6 finnes det i tillegg moduler av rang 2. Det er lett å se at rangen til en modul bevares ved kompletering, så dette betyr at E_6-singulariteten er den enkleste singulariteten som har rang 2-moduler (blant de singulariteter og moduler vi betrakter). Det vil senere vise seg at rangen til en modul er av stor betydning for de konneksjoner som finnes på modulen, og vi velger altså E_6 framfor A_2 fordi rang 2-moduler er mer interessante enn rang 1-moduler.

I den nevnte klassifiseringen av de indekomposable, refleksive modulene over $B = k[[x,y]]/(x^4 + y^3)$, finnes to moduler av rang 2. En av disse har en B-fri periodisk oppløsning av rang 3, den andre av rang 4, og vi velger den enkleste. Dette er modulen kalt M_6 i [Siqv], og en B-fri oppløsning av denne modulen er også gitt i [Siqv, s. 21]. Oppløsningen er den følgende:

$$0 \leftarrow M_6 \leftarrow B^3 \xleftarrow{d_0} B^3 \xleftarrow{d_1} B^3 \leftarrow \dots$$

Dette er altså en oppløsning som kommer fra en matrise-faktorisering av $f = x^4 + y^3$ over B, gitt ved at

$$d_0 = \begin{pmatrix} xy & -y^2 & -x^3 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \\ x^2 & -xy & y^2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & -y & x^2 \\ -y & -x & 0 \\ -x & 0 & y \end{pmatrix}$$

og $d_{2n} = d_0$, $d_{2n+1} = d_1$ for alle $n \geq 1$.

Vi kan nå betrakte matrisene d_i som avbildninger $d_i : A^3 \to A^3$ for alle $i \geq 0$. Dette gir oss i det minste et kompleks. Sett $M = coker(d_0)$, og la $\rho : A^3 \to M$ være den kanoniske surjeksjonen. Da har vi en sekvens

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{\rho} A^3 \xleftarrow{d_0} A^3 \xleftarrow{d_1} A^3 \leftarrow \dots$$

Siden $f = x^4 + y^3$ er irredusibel, er dette en oppløsning. Vi har nå fått en modul M over A av rang 2, med en fri oppløsning. Oppløsningen som vi har gitt her, skal vi kalle $(L_\bullet, d_\bullet)$, idet vi setter $L_i = A^3$ for alle $i \geq 0$.

2.4 Monodromi

Anta at $k = \mathbf{C}$, de komplekse tallene. La videre paret (A, M) være gitt, der A er en simpel kurvesingularitet og M er en A-modul av typen som ble introdusert i avsnitt 2.2. Anta at k-algebraen A er et integritetsområde, slik at $X = Spec(A)$ er irredusibel. For hver $\mathbf{V}$-konneksjon ∇ på M, kan vi da definere monodromi til restriksjonen av ∇ til $X - \{0\}$, komplementet til det singulære punktet i X. For enkelhets skyld vil vi ofte kalle dette monodromien til $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇. Legg spesielt merke til at enhver $\mathbf{V}$-konneksjon ∇ på M restriktert til $X - \{0\}$ er integrabel, siden $dim(A) = 1$.

Vi merker oss først at A må være E_6, E_8 eller A_n for en jevn n. Dette betyr at $A = k[x, y]/(f) \cong k[t^l, t^m] \subseteq k[t]$, for to innbyrdes primiske heltall l, m. Vi har derfor at $A_{\{x\}} \cong k[t, t^{-1}]$. Som vanlig betrakter vi det affine skjemaet $X = Spec(A)$. Men vi er interessert i monodromi, og dermed i lukkede punkter utenfor singulariteten. Vi betrakter derfor den åpne, affine delmengden $D(x) = Spec(A_{\{x\}}) \subseteq X$, og ser at $D(x) \cap X_m = X_m - \{0\}$. Dette betyr at $D(x)$ inneholder akkurat de lukkede punktene vi er interessert i. Dessuten er $D(x) = Spec(k[t, t^{-1}])$, så de lukkede punktene i $D(x)$ er i 1-1 korrespondanse med det komplekse plan utenfor origo, $\mathbf{C} - \{0\}$.

Anta nå at M er en A-modul av rang n, at Kodaira-Spencer kjernen til M er $\mathbf{V}$, og at ∇ er en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Fordi modulen er av typen spesifisert i avsnitt 2.2, følger det at $M_{\{x\}}$ er $A_{\{x\}}$-fri av rang n. Dette er lett å sjekke, siden det kun finnes endelig mange moduler over hver av disse k-algebraene vi betrakter. Ved restriksjon til det affine underskjemaet $D(x)$, kan vi nå betrakte $\mathbf{V}_{\{x\}}$-konneksjonen $\nabla_{\{x\}} : \mathbf{V}_{\{x\}} \to End_k(M_{\{x\}})$. Siden $M_{\{x\}}$ er fri, følger det at $\mathbf{V}_{\{x\}} = Der_k(A_{\{x\}}) =< \frac{\partial}{\partial t} >$. Det betyr at $\nabla_{\{x\}}$ er bestemt av sin verdi på $\frac{\partial}{\partial t}$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \in End_k(M_{\{x\}}) = End_k(A^n_{\{x\}})$.

Siden $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}$ er en differensial-operator, er dens kjerne løsninger av differensial-ligninger. Slike ligninger kan man generelt bare løse lokalt. Ved restriksjon av ∇ til et lukket punkt $P \in D(x)$, får vi en $Der_k(A_p)$-konneksjon på M_p, $\nabla_p : Der_k(A_p) \to End_k(M_p)$, siden M_p er A_p-fri. Dette er en konneksjon på M_p, siden A_p er regulær (se proposisjon 1.4). Men vi har at $Der_k(A_p) =< \frac{\partial}{\partial t} >$, så denne konneksjonen er også bestemt av verdien på elementet $\frac{\partial}{\partial t}$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \in End_k(A_p^n)$. Vi betrakter nå en liten omegn U om P i $D(x)$, og kaller ringen av funksjoner som er analytiske i U for A_p^{ana}. Dette er opplagt en utvidelse av ringen A_p, og hvis vi definerer $M_p^{ana} = M \otimes_A A_p^{ana}$, kan vi opplagt utvide ∇_p til ∇_p^{ana}, en konneksjon på M_p^{ana}. Til slutt definerer vi $ker(\nabla_p^{ana}) = \{m \in M_p^{ana} : \nabla_p^{ana}(\frac{\partial}{\partial t})(m) = 0\}$. Dette er k-vektorrommet av analytiske løsninger av differensial-ligningene svarende til ∇.

Siden A er en kurve-singularitet, er $Der_k(A_p) \cong A_p$ for punkter P i $D(x)$. For enhver $\mathbf{V}$-konneksjon på M, har vi derfor at ∇_p er integrabel. Vi er derfor i en situasjon hvor A_p er en lokal, regulær ring, M_p en A-modul, og ∇_p en integrabel konneksjon. Man kan da vise følgende resultat (se [Del]):

Proposisjon 2.1 *La A være en lokal, regulær ring, M en A-modul, og ∇ en integrabel konneksjon på M. For en analytisk utvidelse av A, A^{ana}, har vi da at $M^{ana} \cong ker(\nabla^{ana}) \otimes_k A^{ana}$.*

I vår situasjon betyr dette at $\dim_k ker(\nabla_p^{ana}) = n$. Vi kan derfor løse differensial-ligningene som svarer til ∇_p lokalt i punktet P. Hver ekvivalensklasse av kurver i $\mathbf{C} - \{0\}$ (i sterk topologi) gir derfor opphav til et element i $Aut_k(k^n)$, ved analytisk utvidelse av løsningene langs kurven. Det betyr at vi har monodromi i vanlig kompleks forstand. Siden $\mathbf{C} - \{0\}$ har fundamentalgruppe $\mathbf{Z}$, er monodromien bestemt av et element i $Aut_k(k^n)$. Dette er en $n \times n$-matrise med verdier i $k = \mathbf{C}$, og det er denne matrisen vi vil kalle monodromien til M via $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇.

Vi har altså vist følgende: Hver simpel singularitet A som er et integritet-område, sammen med en A-modul M av rang n og en $\mathbf{V}$-konneksjon ∇ på M gir opphav til et element i $Aut_k(k^n)$, som kalles monodromien til trippelet (A, M, ∇).

Kapittel 3

Kalkulasjonene

Vi vil altså gjøre våre kalkulasjoner for singulariteten E_6, så vi betrakter ringen $A = k[x,y]/(x^4+y^3)$. Vi vil jobbe med modulen M med oppløsning:

$$0 \leftarrow M \leftarrow A^3 \leftarrow \begin{pmatrix} xy & -y^2 & -x^3 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \\ x^2 & -xy & y^2 \end{pmatrix} \leftarrow A^3 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & -y & x^2 \\ -y & -x & 0 \\ -x & 0 & y \end{pmatrix} \leftarrow \ldots$$

I hele dette kapittelet vil vi anta at $k = \mathbf{C}$, de komplekse tallene. For enkelhets skyld vil vi likevel som regel skrive k. Av samme grunn vil vi ofte skrive $p(x,y)$ når vi mener ekvivalensklassen til $p(x,y)$ i A (for et polynom $p(x,y) \in k[x,y]$).

Vi vil senere komme til å trenge A-modulen $Der_k(A)$ eksplisitt beskrevet, så la oss finne generatorer over A for denne modulen: Vi kan representere enhver derivasjon $\delta \in Der_k(A)$ ved en k-linær avbildning $D : k[x,y] \to k[x,y]$ med derivasjonsegenskap, som oppfyller $D(x^4+y^3) \in (x^4+y^3)$. Vi ser at $D(x^4+y^3) = 4x^3D(x) + 3y^2D(y)$, og merker oss at D tilfredstiller Leibniz-regel er det samme som at D er bestemt av verdiene på x og y. (Vi har $D = D(x)\frac{\partial}{\partial x} + D(y)\frac{\partial}{\partial y}$). Dette gir oss følgende betingelser på D:

$$D(x^4+y^3) = 4x^3D(x) + 3y^2D(y) = h(x^4+y^3) \quad \text{for en h } \in k[x,y] \Leftrightarrow$$

$$x^3(4D(x) - hx) = y^2(hy - 3D(y))$$

Men $k[x,y]$ er entydig faktoriseringsområde, så vi får:

$$4D(x) - hx = py^2 \quad \text{og } hy - 3D(y) = px^3 \quad \text{for en } p \in k[x,y] \Leftrightarrow$$

$$D(x) = \frac{1}{4}(hx + py^2) \quad \text{og } D(y) = \frac{1}{3}(hy - px^3)$$

Dette betyr at $Der_k(A)$ er generert av elementene δ_0 og δ_1 over A, der $\delta_0 = \frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}y\frac{\partial}{\partial y}$ er Euler-derivasjonen (svarende til $h = 1, p = 0$), og $\delta_1 = \frac{1}{4}y^2\frac{\partial}{\partial x} -$

$\frac{1}{3}x^3\frac{\partial}{\partial y}$ er den trivielle derivasjonen (svarende til $h = 0, p = 1$). Men $Der_k(A)$ er selvsagt ikke fritt generert av disse elementene. Vi har følgende relasjoner: $y^2\delta_0 - x\delta_1 = 0$, og $x^3\delta_0 + y\delta_1 = 0$. Men det burde nå være klart at disse to relasjonene genererer alle relasjonene over A, så vi har følgende resultat:

$$Der_k(A) \cong A^2 / < (y^2, -x), (x^3, y) >$$

For oversiktens skyld, skriver vi også opp generatorene:

$$\delta_0 = \frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}y\frac{\partial}{\partial y} \qquad \delta_1 = \frac{1}{4}y^2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3}x^3\frac{\partial}{\partial y}$$

Oppløsningen av M vil vi referere til som $(L_\bullet, d_\bullet)$, og den har følgende form:

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\rho} A^3 \xleftarrow{d_0} A^3 \longleftarrow \dots$$

der $d_0 = d_2 = \dots,\ d_1 = d_3 = \dots$ er de to matrisene i matrise-faktoriseringen av $f = x^4 + y^3$ over $k[x, y]$, M er en kvosient av A^3, og ρ er kanonisk kvosientavbildning.

3.1 Kodaira-Spencer kjernen V

Vi har nå en Kodaira-Spencer avbildning $g : Der_k(A) \to Ext^1_A(M, M)$, og en A-undermodul $\mathbf{V} = \ker(g)$ av $Der_k(A)$. Vi ønsker nå å beregne $\mathbf{V}$, og kalkulerer derfor $g(\delta_0)$ og $g(\delta_1)$ i $Ext^1_A(M, M)$. For å kunne gjøre dette, trenger vi først en mer eksplisitt beskrivelse av $Ext^1_A(M, M)$.

Vi minner om definisjonen av $Ext^1_A(M, M)$: For oppløsningen $(L_\bullet, d_\bullet)$ av M, betrakter vi komplekset $Hom_A(L., M)$. Dette komplekset har differentialer $d^i : Hom_A(L_i, M) \to Hom_A(L_{i+1}$ gitt ved at $d^i(\phi) = \phi \circ d_i$ for alle $i \geq 0$. Siden $L_i = A^3$, så er $Hom_A(L_i, M) \cong M^3$ for alle $i \geq 0$. Dessuten ser man at d^i er multiplikasjon med matrisen d_i fra høyre. Vi får derfor følgende kompleks:

$$M^3 \xrightarrow{d^0} M^3 \xrightarrow{d^1} M^3 \longrightarrow \dots$$

Nå er $Ext^1_A(M, M) = \ker(d^1)/im(d^0)$, første kohomologi til den nevnte kompleks.

Ethvert element i M^3 har formen $(m_1, m_2, m_3) \in M^3$ med $m_i \in M$ for $i = 1, 2, 3$. Hver $m_i \in M$ har formen (m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}) med hver $m_{ij} \in A$. Hvert element $a \in A$ er klassen til et element $p \in k[x, y]$. Vi ønsker derfor å identifisere elementer i M^3 med 3×3-matriser med koeffisienter i $k[x, y]$. Vi identifiserer på følgende måte:

$$x = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

Under denne identifikasjonen har vi noen relasjoner: Et element $x = 0$ hvis og bare hvis

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & -y^2 & -x^3 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \\ x^2 & -xy & y^2 \end{pmatrix} \times B$$

for en 3×3-matrise B med koeffisienter i $k[x,y]$, og likheten mellom matrisene er likhet i hver koeffisient modulo $(x^4 + y^3)$.

Siden $Ext^1_A(M,M) = \ker(d^1)/im(d^0)$, er det nødvendig å regne ut $im(d^0)$ for å vite hvilke relasjoner som finnes i $Ext^1_A(M,M)$. Men $im(d^0)$ er generert som A-modul av elementene $d^0(e_{ij})$ for $1 \leq i,j \leq 3$, der hver $e_{ij} \in M^3$ er elementet identifisert med matrisen C med $c_{ij} = 1$, alle andre koeffisienter 0. Dette gir oss følgende 9 generatorer for $im(d^0)$:

$$d^0(e_{11}) = \begin{pmatrix} xy & -y^2 & -x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d^0(e_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ xy & -y^2 & -x^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^0(e_{31}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ xy & -y^2 & -x^3 \end{pmatrix} \qquad d^0(e_{12}) = \begin{pmatrix} -y^2 & -x^3 & x^2y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^0(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d^0(e_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \end{pmatrix}$$

$$d^0(e_{13}) = \begin{pmatrix} x^2 & -xy & y^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d^0(e_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x^2 & -xy & y^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^0(e_{33}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x^2 & -xy & y^2 \end{pmatrix}$$

Vi vet nå at d_0 er en 3×3-matrise (a_{ij}), der hver $a_{ij} \in A$. Vi kan derfor representere $g(\delta)$ ved matrisen $(\delta(a_{ij}))$ som et element i $Ext^1_A(M,M)$, for en vilkårlig derivasjon $\delta \in Der_k(A)$ (se avsnitt 1.3). Vi ønsker nå å finne $g(\delta_0)$ og $g(\delta_1)$ og skrive opp disse som 3×3-matriser:

$$\begin{aligned} g(\delta_0) &= \begin{pmatrix} \delta_0(x^2) & \delta_0(-y^2) & \delta_0(-x^3) \\ \delta_0(-y^2) & \delta_0(-x^3) & \delta_0(x^2y) \\ \delta_0(x^2) & \delta_0(-xy) & \delta_0(y^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7xy & -8y^2 & -9x^3 \\ -8y^2 & -9x^3 & 10x^2y \\ 6x^2 & -7xy & 8y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} xy & -y^2 & -x^3 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \\ x^2 & -xy & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -y^2 & -x^2 \\ 0 & -x^3 & xy \\ 0 & x^2y & -y^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}d^0(e_{22}) - \frac{1}{12}d^0(e_{33}) = 0
\end{aligned}
$$

Dessuten har vi at

$$
\begin{aligned}
g(\delta_1) &= \begin{pmatrix} \delta_1(x^2) & \delta_1(-y^2) & \delta_1(-x^3) \\ \delta_1(-y^2) & \delta_1(-x^3) & \delta_1(x^2y) \\ \delta_1(x^2) & \delta_1(-xy) & \delta_1(y^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7y^3 & 8x^3y & -9x^2y^2 \\ 8x^3y & -9x^2y^2 & 10xy^3 \\ 6xy^2 & -7y^3 & -8x^3y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} xy & -y^2 & -x^3 \\ -y^2 & -x^3 & x^2y \\ x^2 & -xy & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9xy \\ -7y & 0 & 0 \\ 0 & -8y & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x^3y & -x^2y^2 & xy^3 \\ -xy^2 & y^3 & x^3y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}xyd^0(e_{23}) - \frac{1}{12}yd^0(e_{31}) = 0
\end{aligned}
$$

Det følger nå at $g(\delta) = 0$ for alle $\delta \in Der_k(A)$, så $g = 0$, og dermed har vi at $\mathbf{V} = Der_k(A)$.

3.2 V-konneksjonene på M

Vi vet nå at det fins en obstruksjon $lc(M) \in Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ for å finne en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Vi ønsker nå å kalkulere denne obstruksjonen. Vi vet også at hvis $lc(M) = 0$ så er mengden av slike konneksjoner en torsor over $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. I dette tilfellet ønsker vi å finne et uttrykk for alle disse konneksjonene.

Vårt naturlig startpunkt blir nå å beregne obstruksjonen $lc(M)$. Vi begynner derfor med å se på obstruksjonsrommet $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$, og trenger da en beskrivelse av $End_A(M)$. La oss derfor kalkulere denne A-modulen:

3.2.1 Beregning av $\mathbf{End_A(M)}$

Vi vet at $M \cong A^3/im(d_0)$. En A-modul homomorfi fra M inn i M er derfor det samme som en A-linær avbildning $\phi : A^3 \to A^3$, som oppfyller $\phi(im(d_0)) \subseteq$

$im(d_0)$. Dette kan vi identifisere med en 3×3-matrise B med koeffisienter i $k[x,y]$, slik at følgende ligninger er oppfylt:

$$B \circ d_0(e_i) = d_0(x_i) \qquad \text{for en } x_i \in A^3, \qquad i = 1,2,3$$

der hver ligning er en ligning i hver koeffisient modulo $(x^4 + y^3)$, og $\{e_i\}$ er standard-basis for A^3. Anta nå at ϕ har formen

$$\phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix}$$

der hver $a_i \in k[x,y]$. Da har vi at $\phi \in End_A(M)$ hvis og bare hvis det finnes $f_1, \ldots, f_9, h_1, \ldots, h_9 \in k[x,y]$ slik at følgende ligningssystem er oppfylt:

$$\begin{aligned}
&(3.1) & a_1xy - a_4y^2 + a_7x^2 &= f_1xy - f_2y^2 - f_3x^3 + h_1(x^4+y^3) \\
&(3.2) & a_2xy - a_5y^2 + a_8x^2 &= -f_1y^2 - f_2x^3 + f_3x^2y + h_2(x^4+y^3) \\
&(3.3) & a_3xy - a_6y^2 + a_9x^2 &= f_1x^2 - f_2xy + f_3y^2 + h_3(x^4+y^3) \\
&(3.4) & -a_1y^2 - a_4x^3 - a_7xy &= f_4xy - f_5y^2 - f_6x^3 + h_4(x^4+y^3) \\
&(3.5) & -a_2y^2 - a_5x^3 - a_8xy &= -f_4y^2 - f_5x^3 + f_6x^2y + h_5(x^4+y^3) \\
&(3.6) & -a_3y^2 - a_6x^3 - a_9xy &= f_4x^2 - f_5xy + f_6y^2 + h_6(x^4+y^3) \\
&(3.7) & -a_1x^3 + a_4x^2y + a_7y^2 &= f_7xy - f_8y^2 - f_9x^3 + h_7(x^4+y^3) \\
&(3.8) & -a_2x^3 + a_5x^2y + a_8y^2 &= -f_7y^2 - f_8x^3 + f_9x^2y + h_8(x^4+y^3) \\
&(3.9) & -a_3x^3 + a_6x^2y + a_9y^2 &= f_7x^2 - f_8xy + f_9y^2 + h_9(x^4+y^3)
\end{aligned}$$

Vi vil nå få bruk for følgende lemma:

Lemma 3.1 *La $f,g,h \in k[x,y]$ være polynomer slik at $fx^2 + gy^2 + hxy = 0$. Da fins det polynomer $p,q,r \in k[x,y]$ slik at følgende er oppfylt:*

$$\begin{aligned}
f &= -py + ry^2 \\
g &= -qx - rx^2 \\
h &= px + qy
\end{aligned}$$

Dette lemmaet følger lett av at $k[x,y]$ er entydig faktoriserings-område.

Ved hjelp av dette lemmaet er vi i stand til å finne et sett av generatorer for $End_A(M)$: Vi bruker de 3 første ligningene til å utlede hvordan generatorene må se ut, og deretter sjekker vi at disse generatorene også tilfredstiller resten av ligningene.

Vi får fra ligning 3.1:

$$x^2(a_7 + f_3x - h_1x^2) + y^2(-a_4 + f_2 - h_1y) + xy(a_1 - f_1) = 0$$

Lemma 3.1 gir nå :

$$\begin{aligned}
a_7 + f_3x - h_1x^2 &= -p_1y + p_3y^2 \\
-a_4 + f_2 - h_1y &= -p_2x - p_3x^2 \\
a_1 - f_1 &= p_1x + p_2y
\end{aligned}$$

for $p_1, p_2, p_3 \in k[x, y]$, og vi får:

$$\begin{aligned}
a_7 &= -f_3x + h_1x^2 - p_1y + p_3y^2 \\
a_4 &= f_2 - h_1y + p_2x + p_3x^2 \\
a_1 &= f_1 + p_1x + p_2y
\end{aligned}$$

Tilsvarende for ligning 3.2:

$$x^2(a_8 + f_2x - f_3y - h_2x^2) + y^2(-a_5 + f_1 - h_2y) + xy(a_2) = 0$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}
a_8 + f_2x - f_3y - h_2x^2 &= -p_4y + p_6y^2 \\
-a_5 + f_1 - h_2y &= -p_5x - p_6x^2 \\
a_2 &= p_4x + p_5y
\end{aligned}$$

for $p_4, p_5, p_6 \in k[x, y]$, og vi får:

$$\begin{aligned}
a_8 &= -f_2x + f_3y + h_2x^2 - p_4y + p_6y^2 \\
a_5 &= f_1 - h_2y + p_5x + p_6x^2 \\
a_2 &= p_4x + p_5y
\end{aligned}$$

Og for ligning 3.3:

$$x^2(a_9 - f_1 - h_3x^2) + y^2(-a_6 - f_3 - h_3y) + xy(a_3 + f_2) = 0$$

Vi får nå :

$$\begin{aligned}
a_9 - f_1 - h_3x^2 &= -p_7y + p_9y^2 \\
-a_6 - f_3 - h_3y &= -p_8x - p_9x^2 \\
a_3 + f_2 &= p_7x + p_8y
\end{aligned}$$

for $p_7, p_8, p_9 \in k[x, y]$, og dette gir:

$$\begin{aligned}
a_9 &= f_1 + h_3x^2 - p_7y + p_9y^2 \\
a_6 &= -f_3 - h_3y + p_8x + p_9x^2 \\
a_3 &= -f_2 + p_7x + p_8y
\end{aligned}$$

For å oppsummere, har vi nå funnet at $a_1, \ldots, a_9$ må ha følgende form:

$$\begin{aligned}
a_1 &= f_1 + p_1x + p_2y \\
a_2 &= p_4x + p_5y \\
a_3 &= -f_2 + p_7x + p_8y \\
a_4 &= f_2 - h_1y + p_2x + p_3x^2 \\
a_5 &= f_1 - h_2y + p_5x + p_6x^2 \\
a_6 &= -f_3 - h_3y + p_8x + p_9x^2 \\
a_7 &= -f_3x + h_1x^2 - p_1y + p_3y^2 \\
a_8 &= -f_2x + f_3y + h_2x^2 - p_4y + p_6y^2 \\
a_9 &= f_1 + h_3x^2 - p_7y + p_9y^2
\end{aligned}$$

Dette kan vi skrive på følgende måte, når vi skriver $\phi = (a_1, \ldots, a_9)$:

$$\begin{aligned}
\phi &= f_1(1,0,0,0,1,0,0,0,1) + f_2(0,0,-1,1,0,0,0,-x,0) \\
&+ f_3(0,0,0,0,0,-1,-x,-y,0) + h_1(0,0,0,-y,0,0,0,x^2,0,0) \\
&+ h_2(0,0,0,0,-y,0,0,x^2,0) + h_3(0,0,0,0,0,-y,0,0,x^2) \\
&+ p_1(x,0,0,0,0,0,-y,0,0) + p_2(y,0,0,x,0,0,0,0,0) \\
&+ p_3(0,0,0,x^2,0,0,y^2,0,0) + p_4(0,x,0,0,0,0,0,-y,0) \\
&+ p_5(0,y,0,0,x,0,0,0,0) + p_6(0,0,0,0,x^2,0,0,y^2,0) \\
&+ p_7(0,0,x,0,0,0,0,0,-y) + p_8(0,0,y,0,0,x,0,0,0) \\
&+ p_9(0,0,0,0,0,x^2,0,0,y^2)
\end{aligned}$$

Vi ser nå mengden av 9-tupler som tilfredstiller ligning 3.1-3.3 er generert av 15 elementer. Ved innsetting sjekker man lett at disse 15 elementene tilfredstiller ligning 3.4-3.9 også. Det følger da at disse 15 elementene er generatorer for $End_A(M)$ som A-modul.

Men det er åpenbart at disse elementene ikke genererer $End_A(M)$ fritt, så det eksisterer endel relasjoner mellom disse elementene. For å kunne regne videre med $End_A(M)$, må vi selvsagt kjenne alle disse relasjonene. La oss derfor betrakte undermodulen $N \subseteq A^{15}$ som består av alle relasjonene i $End_A(M)$, og regne ut denne.

Merk at nå er $End_A(M)$ en kvosient av A^{15}, der A^{15} har koordinater $(b_1, \ldots, b_{15}) = (f_1, f_2, f_3, p_1, p_4, p_7, p_2, p_5, p_8, p_3, p_6, p_9, h_1, h_2, h_3)$. Overgangen mellom disse koordinatene og matrisen ϕ er da gitt på følgende måte:

$$\phi = \begin{pmatrix} b_1 + b_4x + b_7y & b_2 + b_7x + b_{10}x^2 - b_{13}y & -b_3x - b_4y + b_{10}y^2 + b_{13}x^2 \\ b_5x + b_8y & b_1 + b_8x + b_{11}x^2 - b_{14}y & -b_2x + b_3y - b_5y + b_{11}y^2 + b_{14}x^2 \\ -b_2 + b_6x + b_9y & -b_3 + b_9x + b_{12}x^2 - b_{15}y & b_1 - b_6y + b_{12}y^2 + b_{15}x^2 \end{pmatrix}$$

Vi vet at $\phi \in N$ hvis og bare hvis $\phi(A^3) \subseteq im(d_0)$. Dette svarer til at det fins $f_1, \ldots, f_9, h_1, \ldots, h_9 \in k[x,y]$ slik at $\phi = (b_1, \ldots, b_{15})$ tilfredstiller følgende sett av ligninger:

$$
\begin{aligned}
&(3.10) & b_1 + b_4x + b_7y &= f_1xy - f_2y^2 - f_3x^3 + h_1(x^4 + y^3) \\
&(3.11) & b_5x + b_8y &= -f_1y^2 - f_2x^3 + f_3x^2y + h_2(x^4 + y^3) \\
&(3.12) & -b_2 + b_6x + b_9y &= f_1x^2 - f_2xy + f_3y^2 + h_3(x^4 + y^3) \\
&(3.13) & b_2 + b_7x + b_{10}x^2 - b_13y &= f_4xy - f_5y^2 - f_6x^3 + h_4(x^4 + y^3) \\
&(3.14) & b_1 + b_8x + b_{11}x^2 - b_14y &= -f_4y^2 - f_5x^3 + f_6x^2y + h_5(x^4 + y^3) \\
&(3.15) & -b_3 + b_9x + b_{12}x^2 - b_{15}y &= f_4x^2 - f_5xy + f_6y^2 + h_6(x^4 + y^3) \\
&(3.16) & -b_3x - b_4y + b_{10}y^2 + b_{13}x^2 &= f_7xy - f_8y^2 - f_9x^3 + h_7(x^4 + y^3) \\
&(3.17) & -b_2x + b_3y - b_5y + b_{11}y^2 + b_{14}x^2 &= -f_7y^2 - f_8x^3 + f_9x^2y + h_8(x^4 + y^3) \\
&(3.18) & b_1 - b_6y + b_{12}y^2 + b_{15}x^2 &= f_7x^2 - f_8xy + f_9y^2 + h_9(x^4 + y^3)
\end{aligned}
$$

Vi trenger nå 2 nye lemmaer:

Lemma 3.2 *La $f, g, h \in k[x, y]$ være polynomer slik at $fx + gy + h = 0$. Da fins det polynomer $p, q, r \in k[x, y]$ slik at følgende er oppfylt:*

$$
\begin{aligned}
f &= -p - ry \\
g &= -q - rx \\
h &= px + qy
\end{aligned}
$$

Lemma 3.3 *La $f, g, h \in k[x, y]$ være polynomer, slik at $fx^2 + gy + h = 0$. Da fins det polynomer $p, q, r \in k[x, y]$ slik at følgende er oppfylt:*

$$
\begin{aligned}
f &= -p - ry \\
g &= -q + rx^2 \\
h &= px^2 + qy
\end{aligned}
$$

Som lemma 3.1 følger disse lemmaene lett av at $k[x, y]$ er et entydig faktoriseringsområde.

Vi kan nå finne generatorer for N fra ligningssystemet ved å bruke disse lemmaene. Vi vil bruke ligning 3.10-3.15 til å beskrive hvordan disse generatorene ser ut, og så sjekke at generatorene tilfredstiller ligning 3.16-3.18.
Fra ligning 3.10 får vi nå :

$$x(b_4 - f_1y + f_3x^2 - h_1x^3) + y(b_7 + f_2y - h_1y^2) + (b_1) = 0$$

Lemma 3.2 gir nå

$$
\begin{aligned}
b_4 - f_1y + f_3x^2 - h_1x^3 &= -p_1 - p_3y \\
b_7 + f_2y - h_1y^2 &= -p_2 + p_3x \\
b_1 &= p_1x + p_2y
\end{aligned}
$$

for $p_1, p_2, p_3 \in k[x,y]$. Vi får da

$$\begin{aligned} b_4 &= f_1 y - f_3 x^2 + h_1 x^3 - p_1 - p_3 y \\ b_7 &= -f_2 y + h_1 y^2 - p_2 + p_3 x \\ b_1 &= p_1 x + p_2 y \end{aligned}$$

Fra ligning 3.11 får vi

$$x(b_5 + f_2 x^2 - f_3 xy - h_2 x^3) = y(-b_8 - f_1 y + h_2 y^2)$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_5 + f_2 x^2 - f_3 xy - h_2 x^3 &= p_4 y \\ -b_8 - f_1 y + h_2 y^2 &= p_4 x \end{aligned}$$

for $p_4 \in k[x,y]$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} b_5 &= -f_2 x^2 + f_3 xy + h_2 x^3 + p_4 y \\ b_8 &= -f_1 y + h_2 y^2 - p_4 x \end{aligned}$$

Ligning 3.12 gir

$$x(b_6 - f_1 x + f_2 y - h_3 x^3) + y(b_9 - f_3 y - h_3 y^2) + (-b_2) = 0$$

Fra lemma 3.2 får vi

$$\begin{aligned} b_6 - f_1 x + f_2 y - h_3 x^3 &= -p_5 - p_7 y \\ b_9 - f_3 y - h_3 y^2 &= -p_6 + p_7 x \\ -b_2 &= p_5 x + p_6 y \end{aligned}$$

for $p_5, p_6, p_7 \in k[x,y]$. Det gir

$$\begin{aligned} b_6 &= f_1 x - f_2 y + h_3 x^3 - p_5 - p_7 y \\ b_9 &= f_3 y + h_3 y^2 - p_6 + p_7 x \\ b_2 &= -p_5 x - p_6 y \end{aligned}$$

Tilsvarende for ligning 3.13, når vi setter inn for b_2 og b_7:

$$\begin{aligned} b_2 + b_7 x + b_{10} x^2 - b_{13} y &= (-p_5 x - p_6 y) + x(-f_2 y + h_1 y^2 \\ &\quad - p_2 + p_3 x) + b_{10} x^2 - b_{13} y \\ &= f_4 xy - f_5 y^2 - f_6 x^3 + h_4 (x^4 + y^3) \end{aligned}$$

Dette gir

$$x(b_{10} x - p_5 + h_1 y^2 - p_2 + p_3 x + f_6 x^2 - h_4 x^3) = y(a_{13} + p_6 + f_2 x + f_4 x - f_5 y + h_4 y^2)$$

og dermed

$$\begin{aligned} b_{10}x - p_5 + h_1y^2 - p_2 + p_3x + f_6x^2 - h_4x^3 &= p_8y \\ b_{13} + p_6 + f_2x + f_4x - f_5y + h_4y^2 &= p_8x \end{aligned}$$

for $p_8 \in k[x,y]$. Vi får

$$\begin{aligned} p_2 &= f_6x^2 + h_1y^2 - h_4x^3 + p_3x - p_5 - p_8y + b_{10}x \\ b_{13} &= -f_2x - f_4x + f_5y - h_4y^2 - p_6 + p_8x \end{aligned}$$

Vi må nå sette inn for p_2 i variablene b_1 og b_7:

$$\begin{aligned} b_1 &= p_1x + (f_6x^2 + h_1y^2 - h_4x^3 + p_3x - p_5 - p_8y + b_{10}x)y \\ &= f_6x^2 + h_1y^3 - h_4x^3y + p_1x + p_3xy - p_5y - p_8y^2 + b_{10}xy \\ b_7 &= -f_2y + h_1y^2 - (f_6x^2 + h_1y^2 - h_4x^3 + p_3x - p_5 - p_8y + b_{10}x) + p_3x \\ &= -f_2y - f_6x^2 + h_4x^3 + p_5 + p_8y - b_{10}x \end{aligned}$$

For ligning 3.14, når vi setter inn for b_1 og b_8:

$$\begin{aligned} b_1 + b_8x + b_{11}x^2 - b_{14}y &= (f_6x^2y + h_1y^3 - h_4x^3y + p_1x \\ &\quad + p_3xy - p_5y - p_8y^2 + b_{10}xy) \\ &\quad + x(-f_1y + h_2y^2 - p_4x) + b_{11}x^2 - b_{14}y \\ &= f_4y^2 - f_5x^3 + f_6x^2y + h_5(x^4 + y^3) \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} x(b_{11}x + p_1 - p_4x + f_5x^2 - h_5x^3 - h_4x^2y + p_3y + b_{10}y) + \\ y(-b_{14} + h_1y^2 - p_5 - p_8y + f_4y - h_5y^2 - f_1x + h_2xy) &= 0 \end{aligned}$$

og vi får

$$\begin{aligned} b_{11}x + p_1 - p_4x + f_5x^2 - h_5x^3 - h_4x^2y + p_3y + b_{10}y &= p_9y \\ -b_{14} + h_1y^2 - p_5 - p_8y + f_4y - h_5y^2 - f_1x + h_2xy &= -p_9x \end{aligned}$$

for $p_9 \in k[x,y]$. Vi har da

$$\begin{aligned} p_1 &= -f_5x^2 + h_4x^2y + h_5x^3 - p_3y + p_4x + p_9y - b_{10}y - b_{11}x \\ b_{14} &= -f_1x + f_4y + h_1y^2 + h_2xy - h_5y^2 - p_5 - p_8y + p_9x \end{aligned}$$

Vi må nå sette inn for p_1 i uttrykkene for b_1 og b_4:

$$\begin{aligned} b_1 &= f_6x^2y + h_1y^3 - h_4x^3y + x(-f_5x^2 + h_4x^2y + h_5x^3 - p_3y + \\ &\quad p_4x + p_9y - b_{10}y - b_{11}x) + p_3xy - p_5y - p_8y^2 + b_{10}xy \\ &= -f_5x^3 + f_6x^2y + h_1y^3 + h_5x^4 + p_4x^2 - p_5y - p_8y^2 + p_9xy - b_{11}x^2 \\ b_4 &= f_1y - f_3x^2 + h_1x^3 - (-f_5x^2 + h_4x^2y + h_5x^3 - p_3y + \\ &\quad p_4x + p_9y - b_{10}y - b_{11}x) - p_3y \\ &= f_1y - f_3x^2 + f_5x^2 + h_1x^3 - h_4x^2y - h_5x^3 - p_4x - p_9y + b_{10}y + b_{11}x \end{aligned}$$

Og til slutt for ligning 3.15, når vi setter inn for b_9:

$$\begin{aligned}
-b_3 + b_9x + b_{12}x^2 - b_{15}y &= -b_3 + x(f_3y + h_3y^2 - p_6 + p_7x) \\
&\quad + b_{12}x^2 - b_{15}y \\
&= f_4x^2 - f_5xy + f_6y^2 + h_6(x^4 + y^3)
\end{aligned}$$

Vi får nå

$$\begin{aligned}
x^2(b_{12} + p_7 - f_4 - h_6x^3) + y(-b_{15} + f_3x & \\
+ h_3xy + f_5x - f_6y - h_6y^2) + (-b_3 - p_6x) &= 0
\end{aligned}$$

Lemma 3.3 gir nå :

$$\begin{aligned}
b_{12} + p_7 - f_4 - h_6x^2 &= -p_{10} - p_{12}y \\
-b_{15} + f_3x + h_3xy + f_5x - f_6y - h_6y^2 &= -p_{11} + p_{12}x^2 \\
-b_3 - p_6x &= p_{10}x^2 + p_{11}y
\end{aligned}$$

for $p_{10}, p_{11}, p_{12} \in k[x, y]$. Dette gir

$$\begin{aligned}
b_{12} &= f_4 + h_6x^2 - p_7 - p_{10} - p_{12}y \\
b_{15} &= f_3x + f_5x - f_6y + h_3xy - h_6y^2 + p_{11} - p_{12}x^2 \\
b_3 &= -p_6x - p_{10}x^2 - p_{11}y
\end{aligned}$$

Vi har nå funnet $b_1, \ldots, b_{15}$, og vi oppsummerer:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -f_5x^3 + f_6x^2y + h_1y^3 + h_5x^4 + p_4x^2 - p_5y - p_8y^2 + p_9xy - b_{11}x^2 \\
b_2 &= -p_5x - p_6y \\
b_3 &= -p_6x - p_{10}x^2 - p_{11}y \\
b_4 &= f_1y - f_3x^2 + f_5x^2 + h_1x^3 - h_4x^2y - h_5x^3 - p_4x - p_9y + b_{10}y + b_{11}x \\
b_5 &= -f_2x^2 + f_3xy + h_2x^3 + p_4y \\
b_6 &= f_1x - f_2y + h_3x^3 - p_5 - p_7y \\
b_7 &= -f_2y - f_6x^2 + h_4x^3 + p_5 + p_8y - b_{10}x \\
b_8 &= -f_1y + h_2y^2 - p_4x \\
b_9 &= f_3y + h_3y^2 - p_6 + p_7x \\
b_{10} &= b_{10} \\
b_{11} &= b_{11} \\
b_{12} &= f_4 + h_6x^2 - p_7 - p_{10} - p_{12}y \\
b_{13} &= -f_2x - f_4x + f_5y - h_4y^2 - p_6 + p_8x \\
b_{14} &= -f_1x + f_4y + h_1y^2 + h_2xy - h_5y^2 - p_5 - p_8y + p_9x \\
b_{15} &= f_3x + f_5x - f_6y + h_3xy - h_6y^2 + p_{11} - p_{12}x^2
\end{aligned}$$

(Merk at b_{10} og b_{11} her kan betraktes som frie variable.) Vi kan skrive dette på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
(b_1, \ldots, b_{15}) &= b_{10}v_1 + b_{11}v_2 + \sum_{i=3}^{8} f_{i-2}v_i \\
&+ h_1v_9 + h_2v_{10} + h_3v_{11} + h_4v_{12} + h_5v_{23} + h_6v_{13} \\
&+ \sum_{i=15}^{23} p_{i-11}v_i
\end{aligned}
$$

der v_i for $i = 1, \ldots, 23$ er elementer i A^{15} gitt i følgende tabell:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_1	0	0	0	y	0	0	$-x$	0	0	1	0	0	0	0	0
v_2	$-x^2$	0	0	x	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
v_3	0	0	0	y	0	x	0	$-y$	0	0	0	0	0	$-x$	0
v_4	0	0	0	0	$-x^2$	$-y$	$-y$	0	0	0	0	0	$-x$	0	0
v_5	0	0	0	$-x^2$	xy	0	0	0	y	0	0	0	0	0	x
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-x$	y	0
v_7	$-x^3$	0	0	x^2	0	0	0	0	0	0	0	0	y	0	x
v_8	x^2y	0	0	0	0	0	$-x^2$	0	0	0	0	0	0	0	$-y$
v_9	y^3	0	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y^2	0
v_{10}	0	0	0	0	x^3	0	0	y^2	0	0	0	0	0	xy	0
v_{11}	0	0	0	0	0	x^3	0	0	y^2	0	0	0	0	0	xy
v_{12}	0	0	0	$-x^2y$	0	0	x^3	0	0	0	0	0	$-y^2$	0	0
v_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x^2	0	0	$-y^2$
v_{14}	x^2	0	0	$-x$	y	0	0	$-x$	0	0	0	0	0	0	0
v_{15}	$-y$	$-x$	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
v_{16}	0	$-y$	$-x$	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
v_{17}	0	0	0	0	0	$-y$	0	0	x	0	0	-1	0	0	0
v_{18}	$-y^2$	0	0	0	0	0	y	0	0	0	0	0	x	$-y$	0
v_{19}	xy	0	0	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0
v_{20}	0	0	$-x^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
v_{21}	0	0	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-y$	0	0	$-x^2$
v_{23}	x^4	0	0	$-x^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-y^2$	0

Vi ser nå at mengden av 15-tupler som tilfredstiller ligning 3.10-3.15 er generert av 23 elementer. Det er nå lett å sjekke at disse 23 elementene også tilfredstiller ligning 3.16-3.18. Disse 23 elementene genererer derfor N som A-modul. Dessuten ser vi at betraktet som elementer i A-modulen N, har vi følgende relasjoner:

$$\begin{aligned} v_{22} &= yv_{20} - x^2 v_{21} \\ v_{23} &= -v_9 \end{aligned}$$

Vi har derfor følgende resultat:

$$N = < v_1, \ldots, v_{21} >$$

(genererende mengde for N som A-modul). Dette gir oss at

$$End_A(M) \cong A^{15} / < v_1, \ldots, v_{21} >$$

3.2.2 Beregning av $\mathbf{Ext}^1_{\mathbf{A}}(\mathbf{V}, \mathbf{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}))$

Vi kan nå beregne obstruksjonsrommet $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$. Men for oss er det først og fremst interessant om $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M)) \cong 0$, for i så fall kan vi helt sikkert finne en konneksjon på M. Vi vil derfor nøye oss med deler av kalkulasjonen av obstruksjonsrommet.

Vi vet at $\mathbf{V} \cong A^2 / < (y^2, -x), (x^3, y) >$, så vi har følgende A-frie oppløsning av $\mathbf{V}$:

$$0 \leftarrow \mathbf{V} \leftarrow A^2 \leftarrow \begin{pmatrix} y^2 & x^3 \\ -x & y \end{pmatrix} \leftarrow A^2 \leftarrow \begin{pmatrix} y & -x^3 \\ x & y^2 \end{pmatrix} \leftarrow A^2 \leftarrow \ldots$$

Vi vil betegne denne oppløsningen $(L_\bullet, d_\bullet)$. (Siden oppløsningen av M ikke blir brukt under denne regningen, burde det ikke oppstå forvekslinger med denne oppløsningen). Ettersom $Hom_A(A^2, End_A(M)) \cong End_A(M)^2$, får vi at $Hom_A(L., End_A(M))$ er følgende kompleks:

$$End_A(M)^2 \xrightarrow{d^0} End_A(M)^2 \xrightarrow{d^1} End_A(M)^2 \longrightarrow \ldots$$

Et element $x \in \ker(d^1)$ har nå formen $x = (p_0, p_1)$ for $p_0, p_1 \in End_A(M)$, slik at følgende ligning er oppfylt:

$$d^1(x) = \begin{pmatrix} y & x \\ -x^3 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = 0$$

Dette gir oss to ligninger:

$$yp_0 + xp_1 = 0 \tag{3.19}$$

$$-x^3 p_0 + y^2 p_1 = 0 \tag{3.20}$$

Vi kan nå representere elementene i $End_A(M)$ med 15-tupler av elementer fra $k[x, y]$, slik at $p_0 = (a_1, \ldots, a_{15}), \quad p_1 = (b_1, \ldots, b_{15})$. Vi får da at elementet

$x \in \ker(d^1)$ hvis og bare hvis $p_0, p_1 \in End_A(M)$ oppfyller ligning 3.19-3.20. Ligning 3.19 er nå oppfylt for p_0, p_1 hvis og bare hvis det fins polynomer $f_1, \ldots, f_{21}, h_1, \ldots, h_{15} \in k[x,y]$ slik at følgende ligningssett er oppfylt:

$$\begin{aligned}
ya_1 + xb_1 &= -f_2x^2 - f_7x^3 + f_8x^2y + f_9y^3 + f_{14}x^2 - f_{15}y - f_{18}y^2 + f_{19}xy \\
&\quad + h_1(x^4+y^3) \\
ya_2 + xb_2 &= -f_{15}x - f_{16}y + h_2(x^4+y^3) \\
ya_3 + xb_3 &= -f_{16}x - f_{20}x^2 - f_{21}y + h_3(x^4+y^3) \\
ya_4 + xb_4 &= f_1y + f_2x + f_3y - f_5x^2 + f_7x^2 + f_9x^3 - f_{12}x^2y - f_{14}x - f_{19}y \\
&\quad + h_4(x^4+y^3) \\
ya_5 + xb_5 &= -f_4x^2 + f_5xy + f_{10}x^3 + f_{14}y + h_5(x^4+y^3) \\
ya_6 + xb_6 &= f_3x - f_4y + f_{11}x^3 - f_{15} - f_{17}y + h_6(x^4+y^3) \\
ya_7 + xb_7 &= -f_1x - f_4y - f_8x^2 + f_{12}x^3 + f_{15} + f_{18}y + h_7(x^4+y^3) \\
ya_8 + xb_8 &= -f_3y + f_{10}y^2 - f_{14}x + h_8(x^4+y^3) \\
ya_9 + xb_9 &= f_5y + f_{11}y^2 - f_{16} + f_{17}x + h_9(x^4+y^3) \\
ya_{10} + xb_{10} &= f_1 + h_{10}(x^4+y^3) \\
ya_{11} + xb_{11} &= f_2 + h_{11}(x^4+y^3) \\
ya_{12} + xb_{12} &= f_6 + f_{13}x^2 - f_{17} - f_{20} + h_{12}(x^4+y^3) \\
ya_{13} + xb_{13} &= -f_4x - f_6x + f_7y - f_{12}y^2 - f_{16} + f_{18}x + h_{13}(x^4+y^3) \\
ya_{14} + xb_{14} &= -f_3x + f_6y + f_9y^2 + f_{10}xy - f_{15} - f_{18}y + f_{19}x + h_{14}(x^4+y^3) \\
ya_{15} + xb_{15} &= f_5x + f_7x - f_8y + f_{11}xy - f_{13}y^2 + f_{21} + h_{15}(x^4+y^3)
\end{aligned}$$

Vi kan nå finne alle løsninger av dette ligningssettet på tilsvarende måte som tidligere. Da ser man at én løsning av dette ligningssettet er å velge $a_4 = 1, \quad a_8 = -1, \quad b_6 = 1, \quad b_{14} = -1$, og alle andre $a_i, b_i = 0$. At dette virkelig er en løsning, ser man ved å sette $f_3 = 1$, alle andre variabler som forekommer på høyre side i ligningssystemet lik 0. Man sjekker nå lett at dette også er en løsning av ligning 3.20, for vi har:

$$-x^3p_0 + y^2p_1 = -yv_4 - yv_6 - xv_7 - v_9 - x^2v_{14} - yv_{18} - yv_{20} + x^2v_{21} = 0$$

Det følger nå at $x = (p_0, p_1)$ er et element i $\ker(d^1)$.

Vet nå at $x = 0$ i $Ext_A^1(\mathbf{V}, End_A(M))$ hvis og bare hvis $x \in im(d^0)$. Men vi har at $x \in im(d^0)$ hvis og bare hvis det fins $y \in End_A(M)^2$ slik at følgende ligning er oppfylt i $End_A(M)^2$:

$$x = d^0(y) = \begin{pmatrix} y^2 & -x \\ x^3 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

Dette svarer til at følgende ligninger er oppfylte i A^{30}:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & -x \\ x^3 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

for to elementer $n_0, n_1 \in N$. Men elementet x har konstantledd forskjellig fra null på 4. plass, mens begge ledd på høyre side av ligningen umulig kan ha konstantledd forskjellig fra null på 4. plass. Det følger derfor at $x \notin im(d^0)$, og dermed at $x \neq 0$. Vi har da følgende resultat:

$$Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M)) \ncong 0$$

3.2.3 En k-linær konneksjon på M

Vi har nå vist at obstruksjonsrommet $Ext^1_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ ikke er 0, og det er derfor ikke trivielt at det finnes en konneksjon på M. Vi skal nå beregne obstruksjonen for at en slik finnes, $lc(M)$.

Vi kan alltid konstruere en k-linær konneksjon på M. Obstruksjonen $lc(M)$ er klassen til et slikt element i obstruksjonsrommet, så vi vil komme til å trenge en slik k-linær avbildning eksplisitt gitt. La oss begynne med å konstruere en slik:

Vi minner om at $\mathbf{V} =< \delta_0, \delta_1 >$ som A-modul, og at vi har relasjonene $y^2\delta_0 - x\delta_1 = 0$ og $x^3\delta_0 + y\delta_1 = 0$. Vi vet at vi kan finne en $\nabla_\delta \in End_k(M)$ med derivasjonsegenskap for hver $\delta \in \mathbf{V}$, så vi velger slike ∇_{δ_0} og ∇_{δ_1}. Ideen er nå å finne en k-basis for $\mathbf{V}$, og uttrykke ∇_δ ved hjelp av ∇_{δ_0} og ∇_{δ_1} ved å utvide avbildningen ∇ k-linært.

Vi har en opplagt k-basis for A-modulen $< \delta_0 >$, som består av elementene $x^n y^m \delta_0$ for $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2$. Ved hjelp av de to relasjonene $x\delta_1 = y^2\delta_0$ og $y\delta_1 = -x^3\delta_0$ kan dette utvides til en k-basis for $\mathbf{V}$, gitt som

$$\mathbf{V} =< \{x^n y^m \delta_0 : n \geq 0, m = 0, 1, 2\} \cup \{\delta_1\} >$$

Vi vet at det er mulig å velge ∇_{δ_0} og ∇_{δ_1} i $End_k(M)$ med derivasjonsegenskap, siden $\delta_0, \delta_1 \in \mathbf{V}$, så vi finner to slike elementer: Fra avsnitt 1.3 vet vi at for en vilkårlig $\delta \in \mathbf{V}$, kan vi finne en A-linær $\phi : A^3 \to A^3$ slik at $\rho \circ \phi \circ d_0 = \rho \circ \delta^3 \circ d_0$. Har vi funnet en slik ϕ, kan vi velge $\nabla_\delta = \delta^3 - \phi$. Merk at $\rho \circ \delta^3 \circ d_0$ nettopp er representanten for $g(\delta)$, så for $\delta = \delta_0, \delta_1$ har vi allerede regnet ut denne avbildningen. Vi identifiserer nå ϕ med en 3×3-matrise med elementer fra $k[x, y]$ som vanlig, og får følgende betingelser for ϕ i de to tilfellene $\delta = \delta_0, \delta_1$:

For δ_0 har vi betingelsen

$$\rho \circ \phi \circ d_0 = \rho \circ \delta_0^3 \circ d_0$$

Dette gir

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix} \circ d_0 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7xy & -8y^2 & -9x^3 \\ -8y^2 & -9x^3 & 10x^2y \\ 6x^2 & -7xy & 8y^2 \end{pmatrix}$$

Dette er en likhet modulo $im(d_0)$, og dessuten modulo $(x^4 + y^3)$ i hver koeffisient. Når vi setter $b_i = 12a_i$ for $i = 1, \ldots, 9$, får vi følgende ligninger:

$$b_1xy - b_4y^2 + b_7x^2 - 7xy \quad = \quad f_1xy - f_2y^2 - f_3x^3 + h_1(x^4 + y^3)$$

$$
\begin{aligned}
b_2xy - b_5y^2 + b_8x^2 + 8y^2 &= -f_1y^2 - f_2x^3 + f_3x^2y + h_2(x^4+y^3)\\
b_3xy - b_6y^2 + b_9x^2 - 6x^2 &= f_1x^2 - f_2xy + f_3y^2 + h_3(x^4+y^3)\\
-b_1y^2 - b_4x^3 - b_7xy + 8y^2 &= f_4xy - f_5y^2 - f_6x^3 + h_4(x^4+y^3)\\
-b_2y^2 - b_5x^3 - b_8xy + 9x^3 &= -f_4y^2 - f_5x^3 + f_6x^2y + h_5(x^4+y^3)\\
-b_3y^2 - b_6x^3 - b_9xy + 7xy &= f_4x^2 - f_5xy + f_6x^2 + h_6(x^4+y^3)\\
-b_1x^3 + b_4x^2y + b_7y^2 + 9x^3 &= f_7xy - f_8y^2 - f_9x^3 + h_7(x^4+y^3)\\
-b_2x^3 + b_5x^2y + b_8y^2 - 10x^2y &= -f_7y^2 - f_8x^3 + f_9x^2y + h_8(x^4+y^3)\\
-b_3x^3 + b_6x^2y + b_9y^2 - 8y^2 &= f_7x^2 - f_8xy + f_9y^2 + h_9(x^4+y^3)
\end{aligned}
$$

Vi kan nå velge $b_1 = 7, b_5 = 8, b_9 = 6$, alle andre $b_i = 0$. Dette er en løsning, for sett $f_5 = -1$ og $f_9 = -2$, alle andre $f_i, h_i = 0$.

For δ_1 får vi på tilsvarende måte betingelsen

$$\rho \circ \phi \circ d_0 = \rho \circ \delta_1^3 \circ d_0$$

Dette gir

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix} \circ d_0 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7y^3 & 8x^3y & -9x^2y^2 \\ 8x^3y & -9x^2y^2 & 10xy^3 \\ 6xy^2 & -7y^2 & -8x^3y \end{pmatrix}$$

Vi får da følgende ligningssystem, når vi setter $b_i = 12a_i$ for $i = 1, \ldots, 9$:

$$
\begin{aligned}
b_1xy - b_4y^2 + b_7x^2 - 7y^3 &= f_1xy - f_2y^2 - f_3x^3 + h_1(x^4+y^3)\\
b_2xy - b_5y^2 + b_8x^2 - 8x^3y &= -f_1y^2 - f_2x^3 + f_3x^2y + h_2(x^4+y^3)\\
b_3xy - b_6y^2 + b_9x^2 - 6xy^2 &= f_1x^2 - f_2xy + f_3y^2 + h_3(x^4+y^3)\\
-b_1y^2 - b_4x^3 - b_7xy - 8x^3y &= f_4xy - f_5y^2 - f_6x^3 + h_4(x^4+y^3)\\
-b_2y^2 - b_5x^3 - b_8xy + 9x^2y^2 &= -f_4y^2 - f_5x^3 + f_6x^2y + h_5(x^4+y^3)\\
-b_3y^2 - b_6x^3 - b_9xy + 7y^3 &= f_4x^2 - f_5xy + f_6x^2 + h_6(x^4+y^3)\\
-b_1x^3 + b_4x^2y + b_7y^2 + 9x^2y^2 &= f_7xy - f_8y^2 - f_9x^3 + h_7(x^4+y^3)\\
-b_2x^3 + b_5x^2y + b_8y^2 - 10xy^3 &= -f_7y^2 - f_8x^3 + f_9x^2y + h_8(x^4+y^3)\\
-b_3x^3 + b_6x^2y + b_9y^2 + 8x^3y &= f_7x^2 - f_8xy + f_9y^2 + h_9(x^4+y^3)
\end{aligned}
$$

Vi kan i dette tilfellet velge $b_3 = 6y, b_4 = -7y, b_8 = 8xy$, alle andre $b_i = 0$. For å se at dette virkelig er en løsning, sett $f_4 = -x^2, f_7 = 2xy, h_6 = 1$, alle andre $f_i, h_i = 0$.

Vi har nå funnet $\nabla_{\delta_0}, \nabla_{\delta_1} \in End_k(M)$ med derivasjonsegenskap. La $(f, g, h) \in A^3$ betegne et vilkårlig element, og identifiser $End_k(M)$ med $End_k(A^3)$. Da får ∇_{δ_0} og ∇_{δ_1} følgende form:

$$\nabla_{\delta_0} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0(f) \\ \delta_0(g) \\ \delta_0(h) \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\delta_1}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1(f) \\ \delta_1(g) \\ \delta_1(h) \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -7y & 0 \\ 0 & 0 & 8xy \\ 6y & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

Vi utvider nå dette til en k-linær avbildning $\nabla : \mathbf{V} \to End_k(M)$ ved å bruke den k-basisen vi har for $\mathbf{V}$: Vi setter $\nabla(\delta_0) = \nabla_{\delta_0}$, $\nabla(\delta_1) = \nabla_{\delta_1}$, og $\nabla(x^n y^m \delta_0) = x^n y^m \nabla_{\delta_0}$. (Dette er mulig, siden $End_k(M)$ er en A-modul). Vi har dermed fått en k-linær avbildning ∇, slik at hver ∇_δ har derivasjonsegenskap.

3.2.4 Obstruksjonen lc(M)

Vi minner nå om at den k-linære $\mathbf{V}$-konneksjonen på M gir opphav til et naturlig element $\Psi \in Hom_k(A, Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M)))$, som er gitt ved at $\Psi(a)(\delta) = \nabla_{a\delta} - a\nabla_\delta$. La oss for korthets skyld betegne A-modulen $Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M))$ for P, da har vi $\Psi \in Hom_k(A, P)$. Men fra avsnitt 1.3 vet vi nå at dette elementet gir opphav til et element $\overline{\Psi} \in HH^1(A, P)$. Dette er obstruksjonen $lc(M)$. Vi vet derfor at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis $\Psi = d^0(\eta)$ for en $\eta \in C^0(A, P) = P = Hom_k(\mathbf{V}, End_A(M))$.

Men vi har at $d^0(\eta)(a)(\delta) = a\eta(\delta) - \eta(a\delta)$, så $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis følgende ligning er oppfylt i $End_A(M)$ for alle $a \in A$, $\delta \in \mathbf{V}$:

$$\nabla_{a\delta} - a\nabla_\delta = a\eta(\delta) - \eta(a\delta) \tag{3.21}$$

Siden ∇ og η er k-linære, er det nok å se på denne ligningen for k-basiser for $\mathbf{V}$ og A. Slike basiser har vi alt, så vi får at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis ligning 3.21 er tilfredstilt i følgende tilfeller:

1. Tilfellet $a = x^n y^m$, $\delta = x^r y^s \delta_0$ for $n, r \geq 0$, $m, s = 0, 1, 2$.
2. Tilfellet $a = x^n y^m$, $\delta = \delta_1$ for $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2$.

Vi starter med å se på ligning 3.21 i tilfelle 1: Vi har nå

$$\nabla_{a\delta} - a\nabla_\delta = \nabla_{x^{n+r}y^{m+s}\delta_0} - x^n y^m \nabla_{x^r y^s \delta_0} = 0$$

så vi får

$$a\eta(\delta) - \eta(a\delta) = x^n y^m \eta(x^r y^s \delta_0) - \eta(x^{n+r} y^{m+s} \delta_0) = 0$$

for alle $n, r \geq 0$, $m, s = 0, 1, 2$. Dette er ekvivalent med at

$$\eta(x^n y^m \delta_0) = x^n y^m \eta(\delta_0)$$

for alle $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2$. Men η er bestemt av verdiene på elementene i basisen for $\mathbf{V}$, så når verdien $\eta(\delta_0) = p_0 \in End_A(M)$ er bestemt, er også verdiene $\eta(x^n y^m \delta_0) = x^n y^m p_0$ bestemt for $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2$.

Vi kan nå se på ligning 3.21 i tilfelle 2: Vi definerer

$$A_{n,m} = \nabla_{x^n y^m \delta_1} - x^n y^m \nabla_{\delta_1}$$

for alle $n \geq 0,\ m = 0, 1, 2$. Det gir følgende ligning

$$x^n y^m \eta(\delta_1) - \eta(x^n y^m \delta_1) = A_{n,m}$$

for alle $n \geq 0,\ m = 0, 1, 2$. Dette er ekvivalent med følgende to ligninger

$$\begin{aligned} x\eta(\delta_1) - \eta(x\delta_1) &= A_{1,0} \\ y\eta(\delta_1) - \eta(y\delta_1) &= A_{0,1} \end{aligned}$$

siden $x^r y^s A_{n,m} = A_{n+r,m+s}$ for alle $n, m, r, s \geq 0$. Men η er bestemt av bildet på basisen for $\mathbf{V}$, så hvis vi setter $\eta(\delta_1) = p_1 \in End_A(M)$, gir ligning 3.21 oss følgende betingelser på p_0, p_1:

$$xp_1 - y^2 p_0 = A_{1.0} \tag{3.22}$$

$$yp_1 + x^3 p_0 = A_{0,1} \tag{3.23}$$

Vi har nå at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis det fins $p_0, p_1 \in End_A(M)$ slik at ligning 3.22-3.23 er oppfylt.

Vi starter nå med å beregne elementene $A_{1,0}$ og $A_{0,1}$ i $End_A(M)$: Vi vet at

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= \nabla_{x\delta_1} - x\nabla_{\delta_1} = y^2 \nabla_{\delta_0} - x\nabla_{\delta_1} \\ &= \frac{1}{12}(y^2(-7f, -8g, -6h) - x(7yg, -8xyh, -6yf)) \\ &= \frac{1}{12}(-7y^2 f - 7xyg, -8y^2 g + 8x^2 yh, 6xyf - 6y^2 h) \\ A_{0,1} &= \nabla_{y\delta_1} - y\nabla_{\delta_1} = -x^3 \nabla_{\delta_0} - y\nabla_{\delta_1} \\ &= \frac{1}{12}(-x^3(-7f, -8g, -6h) - y(7yg, -8xyh, -6yf)) \\ &= \frac{1}{12}(7x^3 f - 7y^2 g, 8x^3 g + 8xy^2 h, 6y^2 f + 6x^3 h) \end{aligned}$$

Vi trenger nå å finne $A_{1,0}$ og $A_{0,1}$ uttrykt i koordinatene $(b_1, \ldots, b_{15})$. Vi finner da følgende sammenhenger:

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -7y^2 & -7xy & 0 \\ 0 & -8y^2 & 8x^2 y \\ 6xy & 0 & -6y^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}(-7y^2, -7xy, 0, 0, 0, -y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0) \\ A_{0,1} &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7x^3 & -7y^2 & 0 \\ 0 & 8x^3 & 8xy^2 \\ 6y^2 & 0 & 6x^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}(7x^3, -7y^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -y, 0, x, 0, 0, 0, -x) \end{aligned}$$

Vi får nå følgende ligninger i A^{15}/N, når vi setter $q_o = -12p_0 = (a_1, \dots, a_{15})$ og $q_1 = -12p_1 = (b_1, \dots, b_{15})$:

$$\begin{aligned}
-y^2(a_1, \dots, a_{15}) + x(b_1, \dots, b_{15}) + 12A_{1,0} &= 0 && (3.24)\\
x^3(a_1, \dots, a_{15}) + y(b_1, \dots, b_{15}) + 12A_{0,1} &= 0 && (3.25)
\end{aligned}$$

Dette gir oss at $lc(M) = 0$ hvis og bare hvis ligning 3.24-3.25 har løsninger. Ligning 3.24 har løsning hvis og bare hvis det finnes polynomer $f_1, \dots, f_{21}$ og $h_1, \dots, h_{15} \in k[x, y]$ slik at følgende ligningssystem er oppfylt:

$$\begin{aligned}
-y^2a_1 + xb_1 - 7y^3 &= -f_2x^3 - f_7x^3 + f_8x^2y + f_9y^3 + f_{14}x^2 && (3.26)\\
&\quad - f_{15}y - f_{18}y^2 + f_{19}xy + h_1(x^4 + y^3)\\
-y^2a_2 + xb_2 - 7xy &= -f_{15}x - f_{16}y + h_2(x^4 + y^3) && (3.27)\\
-y^2a_3 + xb_3 &= -f_{16}x - f_{20}x^2 - f_{21}y + h_3(x^4 + y^3) && (3.28)\\
-y^2a_4 + xb_4 &= f_1y + f_2x + f_3y - f_5x^2 + f_7x^2 + f_9x^3 && (3.29)\\
&\quad - f_{12}x^2y - f_{14}x - f_{19}y + h_4(x^4 + y^3)\\
-y^2a_5 + xb_5 &= -f_4x^2 + f_5xy + f_{10}x^3 + f_{14}y + h_5(x^4 + y^3) && (3.30)\\
-y^2a_6 + xb_6 - y &= f_3x - f_4y + f_{11}x^3 - f_{15} - f_{17}y + h_6(x^4 + y^3) && (3.31)\\
-y^2a_7 + xb_7 &= -f_1x - f_4y - f_8x^2 + f_{12}x^3 + f_{15} && (3.32)\\
&\quad + f_{18}y + h_7(x^4 + y^3)\\
-y^2a_8 + xb_8 &= -f_3y + f_{10}y^2 - f_{14}x + h_8(x^4 + y^3) && (3.33)\\
-y^2a_9 + xb_9 &= f_5y + f_{11}y^2 - f_{16} + f_{17}x + h_9(x^4 + y^3) && (3.34)\\
-y^2a_{10} + xb_{10} &= f_1 + h_{10}(x^4 + y^3) && (3.35)\\
-y^2a_{11} + xb_{11} &= f_2 + h_{11}(x^4 + y^3) && (3.36)\\
-y^2a_{12} + xb_{12} &= f_6 + f_{13}x^2 - f_{17} - f_{20} + h_{12}(x^4 + y^3) && (3.37)\\
-y^2a_{13} + xb_{13} &= -f_4x - f_6x + f_7y - f_{12}y^2 - f_{16} && (3.38)\\
&\quad + f_{18}x + h_{13}(x^4 + y^3)\\
-y^2a_{14} + xb_{14} + y &= -f_3x + f_6y + f_9y^2 + f_{10}xy - f_{15} - f_{18}y && (3.39)\\
&\quad + f_{19}x + h_{14}(x^4 + y^3)\\
-y^2a_{15} + xb_{15} &= f_5x + f_7x - f_8y + f_{11}xy - f_{13}y^2 && (3.40)\\
&\quad + f_{21} + h_{15}(x^4 + y^3)
\end{aligned}$$

Vi finner nå generatorer for alle løsninger av dette ligningssystemet, og sjekker deretter at generatorene er løsninger av ligning 3.25:

Fra ligning 3.26 får vi nå :

$$\begin{aligned}
&x(b_1 + f_2x + f_7x^2 - f_{14}x - f_{19}y - h_1x^3)\\
= \;&y(a_1y + 7y + f_8x^2 + f_9y^2 - f_{15} - f_{18}y + h_1y^2)
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_1 + f_2 x + f_7 x^2 - f_{14} x - f_{19} y - h_1 x^3 &= p_1 y \\ a_1 y + 7y + f_8 x^2 + f_9 y^2 - f_{15} - f_{18} y + h_1 y^2 &= p_1 x \end{aligned}$$

for en $p_1 \in k[x,y]$, så vi får:

$$\begin{aligned} b_1 &= -f_2 x - f_7 x^2 + f_{14} x + f_{19} y + h_1 x^3 + p_1 y \\ f_{15} &= 7y + a_1 y + f_8 x^2 + f_9 y^2 - f_{18} y + h_1 y^2 - p_1 x \end{aligned}$$

Fra ligning 3.27 får vi da:

$$x(b_2 - 7y + f_{15} - h_2 x^3) = y(a_2 y - f_{16} + h_2 y^2)$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} b_2 - 7y + f_{15} - h_2 x^3 &= p_2 y \\ a_2 y - f_{16} + h_2 y^2 &= p_2 x \end{aligned}$$

for en $p_2 \in k[x,y]$, så vi får

$$\begin{aligned} b_2 &= 7y - f_{15} + h_2 x^3 + p_2 y \\ &= 7y - (7y + a_1 y + f_8 x^2 + f_9 y^2 - f_{18} y + h_1 y^2 - p_1 x) + h_2 x^3 + p_2 y \\ &= -a_1 y - f_8 x^2 - f_9 y^2 + f_{18} y - h_1 y^2 + h_2 x^3 + p_1 x + p_2 y \\ f_{16} &= a_2 y + h_2 y^2 - p_2 x \end{aligned}$$

Ligning 3.28 gir oss nå :

$$x(b_3 + f_{16} + f_{20} x - h_3 x^3) = y(a_3 y - f_{21} + h_3 y^2)$$

Vi får da

$$\begin{aligned} b_3 + f_{16} + f_{20} x - h_3 x^3 &= p_3 y \\ a_3 y - f_{21} + h_3 y^2 &= p_3 x \end{aligned}$$

for en $p_3 \in k[x,y]$, og dermed får vi

$$\begin{aligned} b_3 &= -f_{16} - f_{20} x + h_3 x^3 + p_3 y \\ &= -(a_2 y + h_2 y^2 - p_2 x) - f_{20} x + h_3 x^3 + p_3 y \\ &= -a_2 y - f_{20} x - h_2 y^2 + h_3 x^3 + p_2 x + p_3 y \\ f_{21} &= a_3 y + h_3 y^2 - p_3 x \end{aligned}$$

Tilsvarende har vi for ligning 3.29

$$\begin{aligned} & x(b_4 - f_2 + f_5 x - f_7 x - f_9 x^2 + f_{14} - h_4 x^3) \\ = \ & y(a_4 y + f_1 + f_3 - f_{12} x^2 - f_{19} + h_4 y^2) \end{aligned}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} b_4 - f_2 + f_5x - f_7x - f_9x^2 + f_{14} - h_4x^3 &= p_4y \\ a_4y + f_1 + f_3 - f_{12}x^2 - f_{19} + h_4y^2 &= p_4x \end{aligned}$$

for en $p_4 \in k[x, y]$, og dermed

$$\begin{aligned} b_4 &= f_2 - f_5x + f_7x + f_9x^2 - f_{14} + h_4x^3 + p_4y \\ f_{19} &= a_4y + f_1 + f_3 - f_{12}x^2 + h_4y^2 - p_4x \\ b_1 &= -f_2x - f_7x^2 + f_{14}x + f_{19}y + h_1x^3 + p_1y \\ &= -f_2x - f_7x^2 + f_{14}x + y(a_4y + f_1 + f_3 - f_{12}x^2 + h_4y^2 - p_4x) \\ &\quad + h_1x^3 + p_1y \\ &= a_4y^2 + f_1y - f_2x + f_3y - f_7x^2 - f_{12}x^2y + f_{14}x + h_1x^3 + h_4y^3 \\ &\quad + p_1y - p_4xy \end{aligned}$$

For ligning 3.30

$$x(b_5 + f_4x - f_{10}x^2 - h_5x^3) = y(a_5y + f_5x + f_{14} + h_5y^2)$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} b_5 + f_4x - f_{10}x^2 - h_5x^3 &= p_5y \\ a_5y + f_5x + f_{14} + h_5y^2 &= p_5x \end{aligned}$$

for en $p_5 \in k[x, y]$, så vi har

$$\begin{aligned} b_5 &= -f_4x + f_{10}x^2 + h_5x^3 + p_5y \\ f_{14} &= -a_5y - f_5x - h_5y^2 + p_5x \\ b_1 &= a_4y^2 + f_1y - f_2x + f_3y - f_7x^2 - f_{12}x^2y + f_{14}x \\ &\quad + h_1x^3 + h_4y^3 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ &= a_4y^2 + f_1y - f_2x + f_3y - f_7x^2 - f_{12}x^2y + x(-a_5y - f_5x \\ &\quad - h_5y^2 + p_5x) \\ &\quad + h_1x^3 + h_4y^3 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ &= a_4y^2 - a_5xy + f_1y - f_2x + f_3y - f_5x^2 - f_7x^2 - f_{12}x^2y \\ &\quad + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ b_4 &= f_2 - f_5x + f_7x + f_9x^2 - f_{14} + h_4x^3 + p_4y \\ &= f_2 - f_5x + f_7x + f_9x^2 - (-a_5y - f_5x - h_5y^2 + p_5x) \\ &\quad + h_4x^3 + p_4y \\ &= a_5y + f_2 + f_7x + f_9x^2 + h_4x^3 + h_5y^2 + p_4y - p_5x \end{aligned}$$

Fra ligning 3.31 får vi, når vi setter inn for f_{15}:

$$\begin{aligned} -y^2a_6 + xb_6 - y &= f_3x - f_4y + f_{11}x^3 - f_{17}y + h_6(x^4 + y^3) \\ &\quad - (7y + a_1y + f_8x^2 + f_9y^2 - f_{18}y + h_1y^2 - p_1x) \end{aligned}$$

Dette gir oss

$$
\begin{aligned}
& x(b_6 - f_3 - f_{11}x^2 + f_8x - p_1 - h_6x^3) \\
= \; & y(a_6y + 1 - f_4 - 7 - a_1 - f_9y + f_{18} - h_1y - f_{17} + h_6y^2)
\end{aligned}
$$

Dermed får vi

$$
\begin{aligned}
b_6 - f_3 - f_{11}x^2 + f_8x - p_1 - h_6x^3 &= p_6y \\
a_6y + 1 - f_4 - 7 - a_1 - f_9y + f_{18} - h_1y - f_{17} + h_6y^2 &= p_6x
\end{aligned}
$$

for en $p_6 \in k[x,y]$. Dette gir

$$
\begin{aligned}
b_6 &= f_3 + f_8x + f_{11}x^2 + h_6x^3 + p_1 + p_6y \\
a_1 &= -6 + a_6y - f_4 - f_9y - f_{17} + f_{18} - h_1y + h_6y^2 - p_6x \\
b_2 &= -a_1y - f_8x^2 - f_9y^2 + f_{18}y - h_1y^2 + h_2x^3 + p_1x + p_2y \\
&= -y(-6 + a_6y - f_4 - f_9y - f_{17} + f_{18} - h_1y + h_6y^2 - p_6x) \\
&\quad - f_8x^2 - f_9y^2 + f_{18}y - h_1y^2 + h_2x^3 + p_1x + p_2y \\
&= 6y - a_6y^2 + f_4y - f_8x^2 + f_{17}y + h_2x^3 - h_6y^3 + p_1x + p_2y + p_6xy \\
f_{15} &= 7y + a_1y + f_8x^2 + f_9y^2 - f_{18}y + h_1y^2 - p_1x \\
&= 7y + y(-6 + a_6y - f_4 - f_9y - f_{17} + f_{18} - h_1y + h_6y^2 - p_6x) \\
&\quad + f_8x^2 + f_9y^2 - f_{18}y + h_1y^2 - p_1x \\
&= y + a_6y^2 - f_4y + f_8x^2 - f_{17}y - p_1x - p_6xy
\end{aligned}
$$

Vi setter så inn for f_{15} i ligning 3.32:

$$
\begin{aligned}
-y^2a_7 + xb_7 &= -f_1x - f_4y - f_8x^2 + f_{12}x^3 + f_{18}y + h_7(x^4 + y^3) \\
&\quad + (7y + a_1y + f_8x^2 + f_9y^2 - f_{18}y + h_1y^2 - p_1x)
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
& x(b_7 + f_1 - f_{12}x^2 + p_1 + p_6y - h_7x^3) \\
= \; & y(a_7y - f_4 + 1 + a_6y - f_4 - f_{17} + f_{18} + h_7y^2)
\end{aligned}
$$

så vi får

$$
\begin{aligned}
b_7 + f_1 - f_{12}x^2 + p_1 + p_6y - h_7x^3 &= p_7y \\
a_7y - f_4 + 1 + a_6y - f_4 - f_{17} + f_{18} + h_7y^2 &= p_7x
\end{aligned}
$$

for en $p_7 \in k[x,y]$. Dette gir

$$
\begin{aligned}
b_7 &= -f_1 + f_{12}x^2 + h_7x^3 - p_1 - p_6y + p_7y \\
f_{18} &= -1 - a_6 - a_7y + 2f_4 + f_{17} - h_7y^2 + p_7x \\
a_1 &= -6 + a_6y - f_4 - f_9y - f_{17} + f_{18} - h_1y + h_6y^2 - p_6x \\
&= -6 + a_6y - f_4 - f_9y - f_{17} - h_1y + h_6y^2 - p_6x \\
&\quad + (-1 - a_6 - a_7y + 2f_4 + f_{17} - h_7y^2 + p_7x) \\
&= -7 - a_7y + f_4 - f_9y - h_1y + h_6y^2 - h_7y^2 - p_6x + p_7x
\end{aligned}
$$

Tilsvarende for ligning 3.33, når vi setter inn for f_{14}:

$$\begin{aligned}-y^2a_8 + xb_8 &= -f_3y + f_{10}y^2 - x(-a_5y - f_5x - h_5y^2 + p_5x) \\ &\quad + h_8(x^4 + y^3)\end{aligned}$$

Dette gir

$$x(b_8 - a_5y - f_5x - h_5y^2 + p_5x - h_8x^3) = y(a_8y - f_3 + f_{10}y + h_8y^2)$$

Vi får nå

$$\begin{aligned}b_8 - a_5y - f_5x - h_5y^2 + p_5x - h_8x^3 &= p_8y \\ a_8y - f_3 + f_{10}y + h_8y^2 &= p_8x\end{aligned}$$

for en $p_8 \in k[x, y]$, og dermed

$$\begin{aligned}b_8 &= a_5y + f_5x + h_5y^2 + h_8x^3 - p_5x + p_8y \\ f_3 &= a_8y + f_{10}y + h_8y^2 - p_8x \\ b_1 &= a_4y^2 - a_5xy + f_1y - f_2x + f_3y - f_5x^2 \\ &\quad - f_7x^2 - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ &= a_4y^2 - a_5xy + f_1y - f_2x + y(a_8y + f_{10}y + h_8y^2 - p_8x) - f_5x^2 \\ &\quad - f_7x^2 - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 + f_1y - f_2x - f_5x^2 - f_7x^2 + f_{10}y^2 - f_{12}x^2y \\ &\quad + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy \\ b_6 &= f_3 + f_8x + f_{11}x^2 + h_6x^3 + p_1 + p_6y \\ &= (a_8y + f_{10}y + h_8y^2 - p_8x) + f_8x + f_{11}x^2 + h_6x^3 + p_1 + p_6y \\ &= a_8y - f_8x + f_{10}y + f_{11}x^2 + h_6x^3 + h_8y^2 + p_1 + p_6y - p_8x \\ f_{19} &= a_4y + f_1 + f_3 - f_{12}x^2 + h_4y^2 - p_4x \\ &= a_4y + f_1 + (a_8y + f_{10}y + h_8y^2 - p_8x) - f_{12}x^2 + h_4y^2 - p_4x \\ &= a_4y + a_8y + f_1 + f_{10}y - f_{12}x^2 + h_4y^2 + h_8y^2 - p_4x - p_8x\end{aligned}$$

For ligning 3.34 får vi, når vi setter inn for f_{16}:

$$-y^2a_9 + xb_9 = f_5y + f_{11}y^2 - (a_2y + h_2y^2 - p_2x) + f_{17}x + h_9(x^4 + y^3)$$

Dette gir

$$x(b_9 - p_2 - f_{17} - h_9x^3) = y(a_9y + f_5 + f_{11}y - a_2 - h_2y + h_9y^2)$$

så vi får

$$\begin{aligned}b_9 - p_2 - f_{17} - h_9x^3 &= p_9y \\ a_9y + f_5 + f_{11}y - a_2 - h_2y + h_9y^2 &= p_9x\end{aligned}$$

for en $p_9 \in k[x,y]$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
b_9 &= f_{17} + h_9x^3 + p_2 + p_9y \\
a_2 &= a_9y + f_5 + f_{11}y - h_2y + h_9y^2 - p_9x \\
b_3 &= -a_2y - f_{20}x - h_2y^2 + h_3x^3 + p_2x + p_3y \\
&= -y(a_9y + f_5 + f_{11}y - h_2y + h_9y^2 - p_9x) \\
&\quad - f_{20}x - h_2y^2 + h_3x^3 + p_2x + p_3y \\
&= -a_9y^2 - f_5y - f_{11}y^2 - f_{20}x + h_3x^3 - h_9y^3 + p_2x + p_3y + p_9xy \\
f_{16} &= a_2y + h_2y^2 - p_2x \\
&= y(a_9y + f_5 + f_{11}y - h_2y + h_9y^2 - p_9x) + h_2y^2 - p_2x \\
&= a_9y^2 + f_5y + f_{11}y^2 + h_9y^3 - p_2x - p_9xy
\end{aligned}$$

For ligning 3.35 får vi:

$$x(b_{10} - h_{10}x^3) = (a_{10}y^2 + f_1 + h_{10}y^2)$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
b_{10} - h_{10}x^3 &= p_{10} \\
a_{10}y^2 + f_1 + h_{10}y^2 &= p_{10}x
\end{aligned}$$

for en $p_{10} \in k[x,y]$. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
b_{10} &= h_{10}x^3 + p_{10} \\
f_1 &= -a_{10}y^2 - h_{10}y^3 + p_{10}x \\
b_1 &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 + f_1y - f_2x - f_5x^2 - f_7x^2 + f_{10}y^2 - f_{12}x^2y \\
&\quad + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy \\
&= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 + y(-a_{10}y^2 - h_{10}y^3 + p_{10}x) - f_2x - f_5x^2 \\
&\quad - f_7x^2 + f_{10}y^2 - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 + p_1y \\
&\quad - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy \\
&= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_{10}y^3 - f_2x - f_5x^2 - f_7x^2 + f_{10}y^2 - f_{12}x^2y \\
&\quad + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 - h_{10}y^4 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\
&\quad - p_8xy + p_{10}xy \\
b_7 &= -f_1 + f_{12}x^2 + h_7x^3 - p_1 - p_6y + p_7y \\
&= -(-a_{10}y^2 - h_{10}y^3 + p_{10}x) + f_{12}x^2 + h_7x^3 - p_1 - p_6y + p_7y \\
&= a_{10}y^2 + f_{12}x^2 + h_7x^3 + h_{10}y^3 - p_1 - p_6y + p_7y - p_{10}x \\
f_{19} &= a_4y + a_8y + f_1 + f_{10}y - f_{12}x^2 + h_4y^2 + h_8y^2 - p_4x - p_8x \\
&= a_4y + a_8y + (-a_{10}y^2 - h_{10}y^3 + p_{10}x) + f_{10}y \\
&\quad - f_{12}x^2 + h_4y^2 + h_8y^2 - p_4x - p_8x \\
&= a_4y + a_8y - a_{10}y^2 + f_{10}y - f_{12}x^2 + h_4y^2 + h_8y^2 \\
&\quad - h_{10}y^3 - p_4x - p_8x + p_{10}x
\end{aligned}$$

Tilsvarende har vi for ligning 3.36:

$$x(b_{11} - h_{11}x^3) = (a_{11}y^2 + h_{11}y^3 + f_2)$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_{11} - h_{11}x^3 &= p_{11} \\ a_{11}y^2 + h_{11}y^3 + f_2 &= p_{11}x \end{aligned}$$

for en $p_{11} \in k[x, y]$. Da får vi

$$\begin{aligned} b_{11} &= h_{11}x^3 + p_{11} \\ f_2 &= -a_{11}y^2 - h_{11}y^3 + p_{11}x \\ b_1 &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_{10}y^3 - f_2x - f_5x^2 - f_7x^2 + f_{10}y^2 - f_{12}x^2y \\ &\quad + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 - h_{10}y^4 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ &\quad - p_8xy + p_{10}xy \\ &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_{10}y^3 - x(-a_{11}y^2 - h_{11}y^3 + p_{11}x) - f_5x^2 \\ &\quad - f_7x^2 + f_{10}y^2 - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 - h_{10}y^4 \\ &\quad + p_1y - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy + p_{10}xy \\ &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_{10}y^3 + a_{11}xy^2 - f_5x^2 - f_7x^2 + f_{10}y^2 \\ &\quad - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 - h_{10}y^4 + h_{11}xy^3 + p_1y \\ &\quad - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy + p_{10}xy - p_{11}x^2 \\ b_4 &= a_5y + f_2 + f_7x + f_9x^2 + h_4x^3 + h_5y^2 + p_4y - p_5x \\ &= a_5y + (-a_{11}y^2 - h_{11}y^3 + p_{11}x) + f_7x + f_9x^2 + h_4x^3 + h_5y^2 \\ &\quad + p_4y - p_5x \\ &= a_5y - a_{11}y^2 + f_7x + f_9x^2 + h_4x^3 + h_5y^2 - h_{11}y^3 + p_4y \\ &\quad - p_5x + p_{11}x \end{aligned}$$

Fra ligning 3.37 får vi da

$$x(b_{12} - f_{13}x - h_{12}x^3) = (a_{12}y^2 + f_6 - f_{17} - f_{20} + h_{12}y^3)$$

Dette gir

$$\begin{aligned} b_{12} - f_{13}x - h_{12}x^3 &= p_{12} \\ a_{12}y^2 + f_6 - f_{17} - f_{20} + h_{12}y^3 &= p_{12}x \end{aligned}$$

for en $p_{12} \in k[x, y]$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} b_{12} &= f_{13}x + h_{12}x^3 + p_{12} \\ f_6 &= -a_{12}y^2 + f_{17} + f_{20} - h_{12}y^3 + p_{12}x \end{aligned}$$

Tilsvarende for ligning 3.38 når vi setter inn for f_6, f_{16} og f_{18}:

$$\begin{aligned} y^2a_{13} + xb_{13} &= -f_4x - x(-a_{12}y^2 + f_{17} + f_{20} - h_{12}y^3 + p_{12}x) + f_7y \\ &\quad - f_{12}y^2 - (a_9y^2 + f_5y + f_{11}y^2 + h_9y^3 - p_2x - p_9xy) \\ &\quad + x(-1 - a_6 - a_7y + 2f_4 + f_{17} - h_7y^2 + p_7x) \\ &\quad + h_{13}(x^4 + y^3) \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} & x(b_{13} - a_{12}y^2 + f_{20} - h_{12}y^3 + p_{12}x - p_2 - p_9y + 1 + a_6y + a_7y - f_4 \\ & \quad + h_7y^2 - p_7x - h_{13}x^3) \\ = \; & y(a_{13}y + f_7 - f_{12}y - a_9y - f_5 - f_{11}y - h_9y^2 + h_{13}y^2) \end{aligned}$$

og dermed får vi

$$\begin{aligned} b_{13} - a_{12}y^2 + f_{20} - h_{12}y^3 + p_{12}x - p_2 - p_9y + 1 + a_6y + a_7y - f_4 & \\ + h_7y^2 - p_7x - h_{13}x^3 &= p_{13}y \\ a_{13}y + f_7 - f_{12}y - a_9y - f_5 - f_{11}y - h_9y^2 + h_{13}y^2 &= p_{13}x \end{aligned}$$

for en $p_{13} \in k[x, y]$. Vi har da

$$\begin{aligned} b_{13} &= -1 - a_6y - a_7 + a_{12}y^2 + f_4 - f_{20} - h_7y^2 + h_{12}y^3 + h_{13}x^3 + p_2 \\ &\quad + p_7x + p_9y - p_{12}x + p_{13}y \\ f_7 &= a_9y - a_{13}y + f_5 + f_{11}y + f_{12}y + h_9y^2 - h_{13}y^2 + p_{13}x \\ b_4 &= a_5y - a_{11}y^2 + f_7x + f_9x^2 + h_4x^3 + h_5y^2 - h_{11}y^3 + p_4y - p_5x + p_{11}x \\ &= a_5y - a_{11}y^2 + x(a_9y - a_{13}y + f_5 + f_{11}y + f_{12}y + h_9y^2 - h_{13}y^2 \\ &\quad + p_{13}x) + f_9x^2 + h_4x^3 + h_5y^2 - h_{11}y^3 + p_4y - p_5x + p_{11}x \\ &= a_5y + a_9xy - a_{11}y^2 - a_{13}xy + f_5x + f_9x^2 + f_{11}xy + f_{12}xy \\ &\quad + h_4x^3 + h_5y^2 + h_9xy^2 - h_{11}y^3 - h_{13}xy^2 + p_4y - p_5x + p_{11}x \\ b_1 &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_{10}y^3 + a_{11}xy^2 - f_5x^2 - f_7x^2 + f_{10}y^2 \\ &\quad - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 - h_{10}y^4 + h_{11}xy^3 + p_1y \\ &\quad - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy + p_{10}xy - p_{11}x^2 \\ &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_{10}y^3 + a_{11}xy^2 - f_5x^2 - x^2(a_9y - a_{13}y \\ &\quad + f_5 + f_{11}y + f_{12}y + h_9y^2 - h_{13}y^2 + p_{13}x) + f_{10}y^2 \\ &\quad - f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 - h_{10}y^4 + h_{11}xy^3 + p_1y \\ &\quad - p_4xy + p_5x^2 - p_8xy + p_{10}xy - p_{11}x^2 \\ &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_9x^2y - a_{10}y^3 + a_{11}xy^2 + a_{13}x^2y - 2f_5x^2 \\ &\quad + f_{10}y^2 - f_{11}x^2y - 2f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 \\ &\quad - h_9x^2y^2 - h_{10}y^4 + h_{11}xy^3 + h_{13}x^2y^2 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\ &\quad - p_8xy + p_{10}xy - p_{11}x^2 - p_{13}x^3 \end{aligned}$$

For 3.39 får vi, når vi setter inn for f_3, f_6, f_{15}, f_{18} og f_{19}:

$$\begin{aligned}
-y^2a_{14} + xb_{14} + y &= -x(a_8y + f_{10}y + h_8y^2 - p_8x) + y(-a_{12}y^2 \\
&\quad + f_{17} + f_{20} - h_{12}y^3 + p_{12}x) + f_9y^2 + f_{10}xy \\
&\quad - (y + a_6y^2 - f_4y + f_8x^2 - f_{17}y - p_1x - p_6xy) \\
&\quad - y(-1 - a_6 - a_7y + 2f_4 + f_{17} - h_7y^2 + p_7x) \\
&\quad + x(a_4y + a_8y - a_{10}y^2 + f_{10}y - f_{12}x^2 + h_4y^2 + h_8y^2 \\
&\quad - h_{10}y^3 - p_4x - p_8x + p_{10}x) + h_{14}(x^4 + y^3)
\end{aligned}$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned}
& x(-a_4y + a_{10}y^2 + b_{14} + f_8x - f_{10}y + f_{12}x^2 - h_4y^2 + h_{10}y^3 \\
& - h_{14}x^3 - p_1 + p_4x - p_6y + p_7y - p_{10}x - p_{12}y) \\
= \; & y(-1 + a_7y - a_{12}y^2 + a_{14}y - f_4 + f_9y + f_{17} + f_{20} + h_7y^2 \\
& - h_{12}y^3 + h_{14}y^2)
\end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
-a_4y + a_{10}y^2 + b_{14} + f_8x - f_{10}y + f_{12}x^2 - h_4y^2 + h_{10}y^3 & \\
- h_{14}x^3 - p_1 + p_4x - p_6y + p_7y - p_{10}x - p_{12}y &= p_{14}y \\
-1 + a_7y - a_{12}y^2 + a_{14}y - f_4 + f_9y + f_{17} + f_{20} + h_7y^2 & \\
- h_{12}y^3 + h_{14}y^2 &= p_{14}x
\end{aligned}$$

for en $p_{14} \in k[x, y]$, så vi får da

$$\begin{aligned}
b_{14} &= a_4y - a_{10}y^2 - f_8x + f_{10}y - f_{12}x^2 + h_4y^2 - h_{10}y^3 \\
&\quad + h_{14}x^3 + p_1 - p_4x + p_6y - p_7y + p_{10}x + p_{12}y + p_{14}y \\
f_{17} &= 1 - a_7y + a_{12}y^2 - a_{14}y + f_4 - f_9y - f_{20} - h_7y^2 + h_{12}y^3 \\
&\quad - h_{14}y^2 + p_{14}x \\
b_9 &= f_{17} + h_9x^3 + p_2 + p_9y \\
&= (1 - a_7y + a_{12}y^2 - a_{14}y + f_4 - f_9y - f_{20} - h_7y^2 + h_{12}y^3 \\
&\quad - h_{14}y^2 + p_{14}x) + h_9x^3 + p_2 + p_9y \\
&= 1 - a_7y + a_{12}y^2 - a_{14}y + f_4 - f_9y - f_{20} - h_7y^2 + h_9x^3 + h_{12}y^3 \\
&\quad - h_{14}y^2 + p_2 + p_9y + p_{14}x \\
b_2 &= 6y - a_6y^2 + f_4y - f_8x^2 + f_{17}y + h_2x^3 - h_6y^3 + p_1x + p_2y + p_6xy \\
&= 6y - a_6y^2 + f_4y - f_8x^2 + y(1 - a_7y + a_{12}y^2 - a_{14}y + f_4 - f_9y - f_{20} \\
&\quad - h_7y^2 + h_{12}y^3 - h_{14}y^2 + p_{14}x) + h_2x^3 - h_6y^3 + p_1x + p_2y + p_6xy \\
&= 7y - a_6y^2 - a_7y^2 + a_{12}y^3 - a_{14}y^2 + 2f_4y - f_8x^2 - f_9y^2 - f_{20}y \\
&\quad + h_2x^3 - h_6y^3 - h_7y^3 + h_9x^3y + h_{12}y^4 - h_{14}y^3 + p_1x + 2p_2y + p_6xy \\
&\quad + p_9y^2 + p_{14}xy
\end{aligned}$$

Merk her at vi skulle erstattet f_{17} med uttrykket ovenfor også i f_6, f_{18} og f_{15} for å være fullstendige. Men vi ville ikke komme til å ha bruk for disse uttrykkene i det som følger. Til slutt får vi for ligning 3.40, når vi setter inn for f_7 og f_{21}:

$$\begin{aligned} -y^2a_{15} + xb_{15} &= f_5x + x(a_9y - a_{13}y + f_5 + f_{11}y + f_{12}y + h_9y^2 \\ &\quad - h_{13}y^2 + p_{13}x) - f_8y + f_{11}xy - f_{13}y^2 \\ &\quad + (a_3y + h_3y^2 - p_3x) + h_{15}(x^4 + y^3) \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} & x(-a_9y + a_{13}y + b_{15} - 2f_5 - 2f_{11}y - f_{12}y - h_9y^2 + h_{13}y^2 - h_{15}x^3 \\ & + p_3 - p_{13}x) \\ = \; & y(a_3 + a_{15}y - f_8 - f_{13}y + h_3y + h_{15}y^2) \end{aligned}$$

så vi har

$$\begin{aligned} - a_9y + a_{13}y + b_{15} - 2f_5 - 2f_{11}y - f_{12}y & \\ - h_9y^2 + h_{13}y^2 - h_{15}x^3 + p_3 - p_{13}x &= p_{15}y \\ a_3 + a_{15}y - f_8 - f_{13}y + h_3y + h_{15}y^2 &= p_{15}x \end{aligned}$$

for en $p_{15} \in k[x, y]$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} b_{15} &= a_9y - a_{13}y + 2f_5 + 2f_{11}y + f_{12}y + h_9y^2 - h_{13}y^2 + h_{15}x^3 - p_3 \\ &\quad + p_{13}x + p_{15}y \\ a_3 &= -a_{15}y + f_8 + f_{13}y - h_3y - h_{15}y^2 + p_{15}x \end{aligned}$$

For å oppsummere, har vi da følgende form for alle løsninger av ligningssystemet:

$$\begin{aligned} a_1 &= -7 - a_7y + f_4 - f_9y - h_1y + h_6y^2 - h_7y^2 - p_6x + p_7x \\ a_2 &= a_9y + f_5 + f_{11}y - h_2y + h_9y^2 - p_9x \\ a_3 &= -a_{15}y + f_8 + f_{13}y - h_3y - h_{15}y^2 + p_{15}x \\ a_4 &= a_4 \\ a_5 &= a_5 \\ a_6 &= a_6 \\ a_7 &= a_7 \\ a_8 &= a_8 \\ a_9 &= a_9 \\ a_{10} &= a_{10} \\ a_{11} &= a_{11} \\ a_{12} &= a_{12} \\ a_{13} &= a_{13} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{14} &= a_{14} \\
a_{15} &= a_{15} \\
b_1 &= a_4y^2 - a_5xy + a_8y^2 - a_9x^2y - a_{10}y^3 + a_{11}xy^2 + a_{13}x^2y - 2f_5x^2 \\
&\quad + f_{10}y^2 - f_{11}x^2y - 2f_{12}x^2y + h_1x^3 + h_4y^3 - h_5xy^2 + h_8y^3 \\
&\quad - h_9x^2y^2 - h_{10}y^4 + h_{11}xy^3 + h_{13}x^2y^2 + p_1y - p_4xy + p_5x^2 \\
&\quad - p_8xy + p_{10}xy - p_{11}x^2 - p_{13}x^3 \\
b_2 &= 7y - a_6y^2 - a_7y^2 + a_{12}y^3 - a_{14}y^2 + 2f_4y - f_8x^2 - f_9y^2 - f_{20}y \\
&\quad + h_2x^3 - h_6y^3 - h_7y^3 + h_9x^3y + h_{12}y^4 - h_{14}y^3 + p_1x + 2p_2y \\
&\quad + p_6xy + p_9y^2 + p_{14}xy \\
b_3 &= -a_9y^2 - f_5y - f_{11}y^2 - f_{20}x + h_3x^3 - h_9y^3 + p_2x + p_3y + p_9xy \\
b_4 &= a_5y + a_9xy - a_{11}y^2 - a_{13}xy + f_5x + f_9x^2 + f_{11}xy + f_{12}xy \\
&\quad + h_4x^3 + h_5y^2 + h_9xy^2 - h_{11}y^3 - h_{13}xy^2 + p_4y - p_5x + p_{11}x \\
b_5 &= -f_4x + f_{10}x^2 + h_5x^3 + p_5y \\
b_6 &= a_8y - f_8x + f_{10}y + f_{11}x^2 + h_6x^3 + h_8y^2 + p_1 + p_6y - p_8x \\
b_7 &= a_{10}y^2 + f_{12}x^2 + h_7x^3 + h_{10}y^3 - p_1 - p_6y + p_7y - p_{10}x \\
b_8 &= a_5y + f_5x + h_5y^2 + h_8x^3 - p_5x + p_8y \\
b_9 &= 1 - a_7y + a_{12}y^2 - a_{14}y + f_4 - f_9y - f_{20} - h_7y^2 + h_9x^3 + h_{12}y^3 \\
&\quad - h_{14}y^2 + p_2 + p_9y + p_{14}x \\
b_{10} &= h_{10}x^3 + p_{10} \\
b_{11} &= h_{11}x^3 + p_{11} \\
b_{12} &= f_{13}x + h_{12}x^3 + p_{12} \\
b_{13} &= -1 - a_6y - a_7 + a_{12}y^2 + f_4 - f_{20} - h_7y^2 + h_{12}y^3 + h_{13}x^3 + p_2 \\
b_{14} &= a_4y - a_{10}y^2 - f_8x + f_{10}y - f_{12}x^2 + h_4y^2 - h_{10}y^3 \\
&\quad + h_{14}x^3 + p_1 - p_4x + p_6y - p_7y + p_{10}x + p_{12}y + p_{14}y \\
b_{15} &= a_9y - a_{13}y + 2f_5 + 2f_{11}y + f_{12}y + h_9y^2 - h_{13}y^2 + h_{15}x^3 - p_3 \\
&\quad + p_{13}x + p_{15}y
\end{aligned}
$$

Vi betrakter her samtlige variable som forekommer på høyre side som frie. Vi har dermed vist at $(a_1, \ldots, a_{15}, b_1, \ldots, b_{15})$ er en løsning av ligning 3.24 hvis og bare hvis disse variablene har en form som vist ovenfor.

Men nå kan vi skrive $(a_1, \ldots, a_{15}, b_1, \ldots, b_{15})$ på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_{15}, b_1, \ldots, b_{15}) &= u_0 + f_4u_1 + f_5u_2 + f_8u_3 + f_9u_4 + f_{10}u_5 \\
&+ f_{11}u_6 + f_{12}u_7 + f_{13}u_8 + f_{20}u_9 + \sum_{i=10}^{21} a_{i-6}u_i \\
&+ \sum_{i=22}^{36} h_{i-21}u_i + \sum_{i=37}^{51} p_{i-36}u_i
\end{aligned}
$$

for 30-tupler $u_0, \dots, u_{51}$ gitt i følgende tabell:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
u_0	-7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$7y$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
u_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$2y$	0	0	$-x$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
u_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-2x^2$	0	$-y$	x	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	2
u_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-x^2$	0	0	0	$-x$	0	0	0	0	0	0	0	$-x$	0
u_4	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y^2$	0	x^2	0	0	0	0	$-y$	0	0	0	0	0	0
u_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y^2	0	0	0	x^2	y	0	0	0	0	0	0	0	y	0
u_6	0	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-x^2y$	0	$-y^2$	xy	0	x^2	0	0	0	0	0	0	0	0	$2y$
u_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-2x^2y$	0	0	xy	0	0	x^2	0	0	0	0	0	0	$-x^2$	y
u_8	0	0	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0
u_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y$	$-x$	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
u_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	0
u_{11}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-xy$	0	0	y	0	0	0	y	0	0	0	0	0	0	0
u_{12}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-y$	0	0
u_{13}	$-y$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y^2$	0	0	0	0	0	0	$-y$	0	0	0	-1	0	0
u_{14}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	y^2	0	0	0	0	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{15}	0	y	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	$-x^2y$	0	$-y^2$	xy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	$-y^3$	0	0	0	0	0	y^2	0	0	0	0	0	0	$-y^2$	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	xy^2	0	0	$-y^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
u_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	y^3	0	0	0	0	0	0	y^2	0	0	0	y^2	0	0
u_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	x^2y	0	0	$-xy$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-y$
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	$-y^2$	0	0	0	0	0	0	$-y$	0	0	0	0	0	0
u_{21}	0	0	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{22}	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{23}	0	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{24}	0	0	$-y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{25}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y^3	0	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{26}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-xy^2$	0	0	y^2	x^3	0	0	y^2	0	0	0	0	0	0	0
u_{27}	y^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y^3$	0	0	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{28}	$-y^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y^3$	0	0	0	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y^3	0	0	0	0	y^2	0	x^3	0	0	0	0	0	0	0
u_{30}	0	y^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-x^2y^2$	x^3y	$-y^3$	xy^2	0	0	0	0	x^3	0	0	0	0	0	y^2
u_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-y^4$	0	0	0	0	0	y^3	0	0	x^3	0	0	0	$-y^3$	0
u_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	xy^3	0	0	$-y^3$	0	0	0	0	0	0	x^3	0	0	0	0
u_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	y^4	0	0	0	0	0	0	y^3	0	0	x^3	y^3	0	0
u_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x^2y^2	0	0	$-xy^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	x^3	0	$-y^2$
u_{35}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-y^3$	0	0	0	0	0	0	$-y^2$	0	0	0	0	x^3	0

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
u_{36}	0	0	$-y^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x^3
u_{37}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	y	x	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0
u_{38}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$2y$	x	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
u_{39}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
u_{40}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-xy$	0	0	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-x$	0
u_{41}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x^2	0	0	$-x$	y	0	0	$-x$	0	0	0	0	0	0	0
u_{42}	$-x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	xy	0	0	0	y	$-y$	0	0	0	0	0	0	y	0
u_{43}	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	y	0	0	0	0	0	0	$-y$	0
u_{44}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-xy$	0	0	0	0	$-x$	0	y	0	0	0	0	0	0	0
u_{45}	0	$-x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	y^2	xy	0	0	0	0	0	y	0	0	0	0	0	0
u_{46}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	xy	0	0	0	0	0	$-x$	0	0	1	0	0	0	x	0
u_{47}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-x^2$	0	0	x	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
u_{48}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	y	0
u_{49}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-x^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x
u_{50}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	xy	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	y	0
u_{51}	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y

Men vi ser nå lett at u_0 også er en løsning av ligning 3.25 :

$$x^3(-7, 0, \ldots, 0) + y(0, 7y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0) = xv_2 - v_7 = 0$$

Dette betyr at u_0 er en løsning av ligning 3.24-3.25, og det følger derfor at $lc(M) = 0$.

3.2.5 V-konneksjonene på M

Vi vet nå at $lc(M) = 0$, så det finnes en $\mathbf{V}$-konneksjon på M. Regningen i foregående avsnitt gir oss imidlertid ikke bare at $lc(M) = 0$, men også et eksplisitt uttrykk for en $\mathbf{V}$-konneksjon ∇^0 på M. Vi har

$$
\begin{aligned}
p_0 &= -\frac{1}{12}(-7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
p_1 &= -\frac{1}{12}(0,7y,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,-1,0,0)
\end{aligned}
$$

Vi minner om at vi alt har regnet ut en k-linær konneksjon på M, ∇. Vi setter nå

$$
\begin{aligned}
\nabla^0(\delta_0) &= \nabla(\delta_0) + p_0 \\
\nabla^0(\delta_1) &= \nabla(\delta_1) + p_1
\end{aligned}
$$

Dette gir oss altså en A-linær avbildning $\nabla^0 : \mathbf{V} \to End_k(M)$, slik at for hver $\delta \in \mathbf{V}$ har vi at $\nabla^0(\delta)(am) = a\nabla^0(\delta)(m) + \delta(a)m$ for alle $a \in A$, $m \in M$. Dette er en $\mathbf{V}$-konneksjon på M, og vi kan finne dens eksplisitte uttrykk.

La oss derfor skrive $\nabla^0_{\delta_0} = \nabla^0(\delta_0)$, og $\nabla^0_{\delta_1} = \nabla^0(\delta_1)$. Vi har da to elementer $\nabla^0_{\delta_0}, \nabla^0_{\delta_1} \in End_k(M)$ som beskriver konneksjonen fullstendig. La oss representere et vilkårlig element i M med det tilsvarende trippelet (f,g,h) av elementer i $k[x,y]$. Vi har da følgende uttrykk for $\nabla^0_{\delta_0}, \nabla^0_{\delta_1}$:

$$
\begin{aligned}
\nabla^0_{\delta_0}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_0(f) \\ \delta_0(g) \\ \delta_0(h) \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \\
\nabla^0_{\delta_1}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_1(f) \\ \delta_1(g) \\ \delta_1(h) \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -y & x^2 \\ 0 & 0 & -xy \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi vet nå at enhver annen $\mathbf{V}$-konneksjon på M, ∇ har formen $\nabla = \nabla^0 + A$, der $A \in Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ er et potensial. Vi kan derfor bestemme alle $\mathbf{V}$-konneksjoner på M ved å bestemme alle potensialene. Men vi har nå at et potensiale er gitt ved sin verdi på δ_0 og δ_1. Vi identifiserer derfor $A(\delta_0) = p_0$ og $A(\delta_1) = p_1$, og da har vi 1-1 korrespondanse mellom potensialer og valg av to elementer $p_0, p_1 \in End_A(M)$ som oppfyller følgende ligningssystem:

$$
\begin{aligned}
-y^2 p_0 + x p_1 &= 0 \\
x^3 p_0 + y p_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Vi minner om at løsningsmengden av ligning 3.24 var $u_0 + < u_1, \ldots, u_{51} >$. Dette betyr at løsningsmengden til den tilsvarende homogene ligning,

$$-y^2(a_1, \ldots, 51) + x(b_1, \ldots, b_{51}) = 0$$

er $< u_1, \ldots, u_{51} >$. Vi merker oss at dette er nøyaktig den første av de definerende ligninger for potensialene. Vi setter derfor $N =< u_1, \ldots, u_{51} >$ som A-modul. Man kan nå sjekke at hver av de 51 generatorene for N også er en løsning av den homogene versjonen av ligning 3.25:

$$x^3(a_1, \ldots, a_{15}) + y(b_1, \ldots, b_{15}) = 0$$

Denne ligningen svarer nøyaktig til den andre av de definerende ligningene for potensialene. Vi har derfor at $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M)) \cong N$ som A-modul. Enhver $\mathbf{V}$-konneksjon på M har derfor formen $\nabla = \nabla^0 + A$, der A er potensiale svarende til et element i N.

Vi merker oss til slutt at dette selvsagt ikke er en fullstendig beskrivelse av alle potensialene, og derfor heller ikke av alle $\mathbf{V}$-konneksjonene på M. For å kunne gi en slik fullstendig beskrivelse, måtte man ha regnet ut A-modulen $Hom_A(\mathbf{V}, End_A(M))$ som en kvotient av A^{51}. Dette skal vi forsøke å gjøre her.

3.3 Krumning

For enhver $\mathbf{V}$-konneksjon ∇ på M, kan man regne ut krumningen til ∇. Det er altså en avbildning fra $\mathbf{V} \wedge_A \mathbf{V}$ og inn i $End_A(M)$, og vi ser umiddelbart at i vårt tilfelle, er $\mathbf{V} \wedge_A \mathbf{V}$ en A-modul generert av elementet $\delta_0 \wedge \delta_1$. Krumningen R_∇ er derfor bestemt av $R_\nabla(\delta_0 \wedge \delta_1)$. Vi skriver ofte $R_\nabla(\delta_0, \delta_1)$ istedet for $R_\nabla(\delta_0 \wedge \delta_1)$.

Vi er nå interessert i krumningen til den konneksjonen som vi har funnet eksplisitt, ∇^0:

$$\begin{aligned}
R_{\nabla^0}(\delta_0, \delta_1) \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} &= (\nabla^0_{\delta_0} \nabla^0_{\delta_1} - \nabla^0_{\delta_1} \nabla^0_{\delta_0} - \nabla^0_{\delta_0\delta_1 - \delta_1\delta_0}) \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \\
&= \nabla^0_{\delta_0} \begin{pmatrix} \delta_1(f) - \frac{1}{12}(yg - x^2 h) \\ \delta_1(g) - \frac{1}{12}(xyh) \\ \delta_1(h) - \frac{1}{12}(xg) \end{pmatrix} \\
&- \nabla^0_{\delta_1} \begin{pmatrix} \delta_0(f) \\ \delta_0(g) - \frac{1}{12}g \\ \delta_0(h) + \frac{1}{12}h \end{pmatrix} \\
&- \nabla^0_{\frac{5}{12}\delta_1} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vi ser nå at $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇^0 har krumning $R_{\nabla^0} = 0$, og dette er derfor en integrabel $\mathbf{V}$-konneksjon på M.

Legg imidlertid merke til følgende: Vi vet at $\mathbf{V} \wedge_A \mathbf{V}$ har støtte i kun ett punkt (det singulære punktet), når vi betrakter denne A-modulen som et knippe over $Spec(A)$. Det er fordi $dim(A) = 1$. Siden krumningen er en avbildning $R_\nabla : \mathbf{V} \wedge_A \mathbf{V} \to End_A(M)$, følger det at $im(R_\nabla)$ også har støtte i kun ett punkt. Dersom $End_A(M)$ er en torsjonsfri modul, følger det at $\mathbf{V}$-konneksjonen må være integrabel. I vårt tilfelle vet vi ikke dette, og det er derfor nødvendig å regne ut krumningen.

Fra avsnitt 1.3 vet vi nå hvordan alle de andre integrable $\mathbf{V}$-konneksjonene på M ser ut, i form av betingelser på potensialene A som er nødvendige og tilstrekkelige for at $\nabla^0 + A$ skal være en integrabel konneksjon. Vi nevner at det er av interesse å kalkulere hvordan disse konneksjonene ser ut, men vi skal ikke forsøke å gjøre det her.

3.4 Monodromi

Siden E_6 er en av de irredusible kurve-singularitetene, kan vi kalkulere monodromi for $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇^0 på M. Vi vet fra den generelle situasjonen at $A_{\{x\}} \cong k[t, t^{-1}]$, og at $M_{\{x\}}$ er $A_{\{x\}}$-fri av rang 2 (siden M har rang 2). La oss først finne en eksplisitt isomorfi $\phi : k[t, t^{-1}]^2 \to M_{\{x\}}$: Vi velger da $\phi(a, b) = \overline{(a, b, 0)}$ for alle $a, b \in k[t, t^{-1}]$. Denne avbildningen har en invers, gitt ved at $\phi^{-1}(a, b, c) = (a + tc, b + t^2 c)$ for et vilkårlig element i $M_{\{x\}}$ representert ved $(a, b, c) \in k[t, t^{-1}]^3$.

Vi vet nå at det finnes en $Der_k(k[t, t^{-1}])$-konneksjon på $M_{\{x\}}$, som er gitt ved dens verdi på $\frac{\partial}{\partial t}$. Vi må finne elementet $\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial t}} \in End_k(A^2_{\{x\}})$ eksplisitt. Men vi har at $k[x, y]/(x^4 + y^3) \cong k[t^3, t^4]$, under isomorfien $x \mapsto t^3$, $y \mapsto -t^4$, og dessuten at $Der_k(A)$ er generert av elementene δ_0, δ_1. Dette gir oss at $12\delta_0 = t\frac{\partial}{\partial t}$, og at $12\delta_1 = t^6 \frac{\partial}{\partial t}$ som elementer i $Der_k(k[t, t^{-1}])$. Vi finner derfor følgende uttrykk for $\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial t}}(a, b)$ for et vilkårlig element $(a, b) \in k[t, t^{-1}]^2$:

$$\begin{aligned}
\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial t}}(a, b) &= \phi^{-1}(\frac{12}{t} \nabla^0_{\delta_0} \phi(a, b)) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(a) \\ \frac{\partial}{\partial t}(b) - bt^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dette gir oss to første ordens differensial-ligninger, på følgende form:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial b}{\partial t} &= \frac{b}{t}
\end{aligned}$$

Når vi løser disse ligningene i $\mathbf{C}-\{0\}$, finner vi at $a = C, b = Dt$ for konstanter $C, D \in \mathbf{C}$, og disse løsningene er selvsagt entydige. Men begge disse funksjonene kan utvides til analytiske funksjoner på hele $\mathbf{C}$. Det følger at $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇^0 gir triviell monodromi, og at vi får en basis $\{(1,0),(0,t)\}$ for $\ker(\nabla^0)$, som gjelder for hele $\mathbf{C} - \{0\}$.

Vi har dermed vist at den spesielle $\mathbf{V}$-konneksjonen ∇^0 gir triviell monodromi. Vi nevner til slutt at det ville være interessant å undersøke om det finnes andre $\mathbf{V}$-konneksjoner på M, med ikke-triviell monodromi, og å regne ut den tilsvarende ekvivalensrelasjonen som er nevnt i 2.4. Det skal vi imidlertid ikke gjøre i denne oppgaven.

3.5 Noen konsekvenser

Vi har altså vist at det finnes en basis $\{(1,0),(0,t)\}$ for k-vektorrommet $\ker(\nabla^0)$. Disse elementene ligger da spesielt i $M_{\{x\}}$, og er på formen $(1,0,0)$ og $(0,t,0)$. Vi ønsker nå å løfte disse elementene til M, og finne undermodulen $M_0 \subseteq M$ som er generert av de tilsvarende elementene.

Vi ser umiddelbart at $(1,0,0)$ kan betraktes som et element i M på en naturlig måte. Siden $t \notin A$, kan vi ikke finne noe tilsvarende element i M. Vi betrakter isteden elementet $t^{-1}(0,t,0) = (0,1,0)$. Vi definerer så $M_0 = A^2$, og avbildningen $\phi : M_0 \to M$, ved at $\phi(a,b) = (a,b,0)$ for vilkårlige elementer $a, b \in A$. Dette er opplagt en injektiv avbildning, og vi ser også at $coker(\phi) = A/m^2$, der $m \subseteq A$ er det maksimale idealet $m = (x,y)$ som svarer til det singulære punktet i $X = Spec(A)$. Vi får følgende korte, eksakte sekvens:

$$0 \to M_0 \to M \to A/m^2 \to 0$$

Dette gir at M er en ekstensjon av A/m^2 med M_0, så M kan oppfattes som et element i $Ext^1_A(A/m^2, M_0)$.

Bibliografi

[Arn] V.I. Arnol'd. *Critical points of smooth functions*. Proc.Int.Congress Math. Vancouver 1974, Vol. 1, s. 19-39.

[A-M] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company 1969.

[B-G-S] R.O. Buchweitz, G.-M. Greuel and F.-O. Schreyer. *Cohen-Macauley modules on hypersurface singularities II*. Preprint 109, Universität Kaiserslautern, 1986.

[Del] Pierre Deligne. *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Springer Verlag 1970.

[Eis] David Eisenbud. *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations*. Trans. Am. 260, 1980.

[G-K] G.-M. Greuel und H. Knörrer. *Einfache Kurvensingularitēten und torsionsfreie Moduln*. Math. Ann. 270, 1985.

[Ha] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer Verlag 1977.

[La1] Olav Arnfinn Laudal. *Formal moduli of Algebraic Structures*. Springer Verlag 1979.

[La2] Olav Arnfinn Laudal. *A framework for change*. Under bearbeidelse.

[La-Pf] Olav Arnfinn Laudal, Gerhard Pfister. *Local moduli and singularities*. Springer Verlag 1980.

[Mat] H. Matsumura. *Commutative algebra*. The Benjamin/Cummings Publishing Co. 1980.

[Siqv] A. Siqveland. *Matric Massey products and formal moduli, modules over E_6*. UiO, 1991.

[Shaf] I. Shafarevich. *Basic algebraic geometry II*. Springer, 1988.

[Spi] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry, Volume I,II*. Publish or Perish 1979.