Hilbert skjemaet av codim 2 underskjemaer av Y (e.g. $Y = \mathbb{P}^3$) og korresponderende modulrom av refleksive stabile knipper

<u>Modulrom</u> "moduli"

- Har en klasse av objekter $\mathcal{M}$ og
- en ekviv. relasjon $\sim$ (f.eks iso.)

<u>Ønsker å vise</u>

$\mathcal{M}/\sim \;\simeq$ et skjema $\mathbf{M}$ på en funktoriell måte.

helst ved å vise representabilitet av funktoren av flate "familier" (fint) eller <u>grovere</u>, å vise

$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(k), \mathbf{M}) \simeq \mathcal{M}/\sim$ "funktorielt"

<u>EKS</u> a) $\mathrm{Hilb}^p(Y)$ = Hilb. skj. (fint)

b) $\mathcal{M}_Y(p)$ = mod. av reflexive stabile knipper på Y

et <u>grovt</u> mod. rom (GM-stabile)

Gitt $(X \subseteq Y) \in \mathrm{Hilb}^p(Y)$, <u>lukket</u> underskj.

La $S \in \mathrm{obj}\, \underline{\ell}$, $\underline{\ell}$ = <u>kat. av art. lokale ringer</u> med res. kropp k.

$$H_X(S) = \{ X_S \subseteq Y \otimes S \mid X_S \text{ er } S\text{-flat og } X_S \otimes_S k = X \}$$

der $Y \otimes S = Y \times \mathrm{Spec}(S)$ = <u>lokal Hilbert funktor</u>

Notasjon

- $R = k[x_0, \dots, x_m]$, $\mathbb{P}^m = \operatorname{Proj} R$
- $\underset{\text{lukket}}{X \subseteq} \mathbb{P}^m$ svarer til $R \to \underbrace{A = R/I_A}_{\text{den homogene koord. ringen}}$, $I_X := I_A$
- $\mathcal{J}_X$ knippe av idealer
- $\mathcal{N}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_X, \mathcal{O}_X)$ normal-knippet
- $H(d,g) := \operatorname{Hilb}^p(\mathbb{P}^3)$, $p(x) = \chi(\mathcal{O}_X(\nu)) = d\nu + 1 - g$
- "kurve" vil si "lok. CM, ekvidim., av dimensjon 1"

Theorem La $X \subseteq \mathbb{P}^m$ være et lok. kompl. snitt (eller svakere lok. ikke-obstruert, kurver i $\mathbb{P}^3$ er lok. ikke-obstr.)

$$\Rightarrow \quad h^0(\mathcal{N}_X) - h^1(\mathcal{N}_X) \leq \dim_{(X)} \operatorname{Hilb}^p \leq h^0(\mathcal{N}_X)$$

likhet $\Leftrightarrow$ X er uobstr.

Om KNIPPER på Y av rang 2

Gitt $\mathcal{F}$. La $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$

refleksiv $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{**}$

$$\operatorname{Def}_{\mathcal{F}}(S) = \left\{ \mathcal{F}_S \text{ knippe på } Y \otimes S \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F}_S \text{ er } S\text{-flat og} \\ \mathcal{F}_S \otimes_S k = \mathcal{F} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

der $S \in \operatorname{obj} \underline{\ell}$

La $P_{\mathcal{F}}$ = Hilb. poly. til $\mathcal{F}$ $= \chi(\mathcal{F}(\nu)) := h^0(\mathcal{F}(\nu)) - h^1(\mathcal{F}(\nu)) + \dots$

$\mathcal{F}$ er GM-stabil $\Leftrightarrow$ $P_{\mathcal{F}'} < P_{\mathcal{F}}/2$ for alle $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ av rang 1.

(antar $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^{**}$)

dvs. torsjonsfri

der $p < q$ betyr $p(\nu) < q(\nu)$ for $\nu \gg 0$

$\mathcal{F}$ er uobstruert $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Def}_{\mathcal{F}}$ er glatt (dvs hullet er glatt $\underset{\text{(ante } \mathcal{F} \text{ GM-stabil)}}{\Longleftrightarrow}$ $M_Y(p)$ er glatt i $(\mathcal{F})$ fordi

$$\boxed{\mathrm{Def}_{\mathcal{F}}(-) \simeq \mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{O}}_{M(p),(\mathcal{F})}, -)}$$

Se Huybrechts and Lehn : "The Geom. of Mod. Spaces of Sheaves" Thm 4.5.1

Corollar (Mori) Ante $\mathcal{F}$ stabil $\Rightarrow$

$$\mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) - \mathrm{ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) \leq \dim_{(\mathcal{F})} M_Y(p) \leq \mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$$

likhet $\Leftrightarrow$ uobstr.

og

global Ext^i av knipper

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F},\mathcal{F}) = \text{tangent/obstr. rom for } i=1,2$$

$\boxed{Y = \mathbb{P}^3}$ Se Hartshorne's papers

$\mathcal{F}$ er GM-stabil $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ er stabil i Chern-klasse betydn.

dvs $c_1(\mathcal{F}') < c_1(\mathcal{F})/2$ for $\underbrace{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}}_{\mathrm{rk}\,1}$

Her er $\Lambda^{\mathrm{rank}\,\mathcal{F}}\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_1)$ og $c_1 = c_1(\mathcal{F})$ er 1. Chern-klasse

Videre $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} = 2$, så :

$$\boxed{\chi(\mathcal{F}) = 2 + \binom{c_1+3}{3} - 2c_2 + \tfrac{1}{2}(c_3 - c_1c_2) - 1}$$

og

$$c_1(\mathcal{F}(\nu)) = c_1 + 2\nu$$
$$c_2(\mathcal{F}(\nu)) = c_2 + c_2\nu + \nu^2 \qquad \text{der } c_i = c_i(\mathcal{F})$$
$$c_3(\mathcal{F}(\nu)) = c_3$$

Kaller fra nå av : $\boxed{M_Y(p) \text{ for } M(c_1, c_2, c_3)}$

Videre : $\boxed{\mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) - \mathrm{ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) = 8c_2 - 2c_1^2 - 3}$ $\mathcal{F}$ stabil

The Serre correspondence

$X \subseteq \mathbb{P}^n$, l.CM, codim c. Then

$$\omega_X = \mathcal{E}xt^c(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n-1))$$

is the canonical Module for which we have

$$\boxed{H^i(\mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^{n-c-i}(\mathcal{F}, \omega_X) \to k \quad \text{perfect pairing}}$$

$X \subseteq \mathbb{P}^3$ a curve.

Let $a \leq e$ = index of speciality, i.e the largest number e for which $H^1(\mathcal{O}_X(e)) \neq 0$

$$\xi \in \underset{\substack{\#\\0}}{H^1(\mathcal{O}_X(a))^\vee} \simeq H^0(\omega_X(-a)) = \underset{\substack{\wr\wr \\ \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_X(a+4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}})}}{H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-4-a)))}$$

$$\Rightarrow \exists \quad (*) \quad \xi: \boxed{0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F} \to \mathcal{J}_X(a+4) \to 0}$$

1. Chern classe $c_1 = c_1(\Lambda^2 \mathcal{F}) \Rightarrow \underline{c_1 = a+4}$

Anvender $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ på $(*)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to \mathcal{J}_X(c_1)^* & \to & \mathcal{F}^* & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \to & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_X(c_1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) & \to & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to 0 \\ \| & & \| & & & & \| & & \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-c_1) & & \mathcal{F}(-c_1) & & & & \omega_X(-a) & & \\ & & \text{(if refl.)} & & & & & & \end{array}$$

dvs $\boxed{0 \to \mathcal{O}_X \to \omega_X(-a) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to 0}$

Så, $\underline{\mathcal{F} \text{ vector bl.}} \Rightarrow \mathcal{O}_X \simeq \omega_X(-a)$, dvs

$\Rightarrow \boxed{\omega_X = \mathcal{O}_X(a) \text{ og } a = e \text{ i.e. subcanonical}}$

Conversely, starting with a reflexive sheaf $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^{**}$), <u>and</u> a section $\sigma \in H^0(\mathcal{F})$, we can construct ⊛. More precisely, on $\mathbb{P}^3$ we have

<u>Theorem</u> (Hartshorne - Serre). Fix c_1

① $(\mathcal{F}, \sigma) \xleftrightarrow{\text{1-1 corr}} (X, \xi)$

vector b with $c_1 = c_1(\mathcal{F})$ and codim 2

l.CI of $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(e)$

② $(\mathcal{F}, \sigma) \xleftrightarrow{\text{1-1}} (X, \xi)$

refl. with $c_1(\mathcal{F}) = c_1$ whose zero-scheme has codim 2

<u>curves</u> and <u>gen. CI</u>

For both correspondences

$\underline{c_2 = d}$ (c_2 = 2. Chern class)

$\underline{c_3 = 2g - 2 + d(4 - c_1)}$, $d = \deg X$, g = arit gen X, $c_3 = h^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X))$

<u>Generalization</u> (Valenzano) 2004

Easy to generalize a smooth threefold Y provided c_1 is replaced by an invertible on Y for which $H^i(\mathcal{L}^{-1}) = 0$ for $i = 1$ and 2, i.e. we have

$$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sigma} \underset{\text{refl.}}{\mathcal{F}} \to \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{L} \to 0$$

(~~then~~ where $\det \mathcal{F} = \mathcal{L}$) and we have (2) above

(and (1) with $\omega_X \simeq \omega_Y \otimes \mathcal{L}$)

Dagens metode:

Vil studere H_X (dvs $\mathcal{O}_{\mathrm{Hilb}^P,(X)}$)

ved å betrakte naturlige deformasjonsfunktor D over H_X, dvs

$$p : D \longrightarrow H_X \quad \text{på } \underline{\ell}$$

Vil vise glatthet av p. Må også finne tangentrommet til fiberen $p^{-1}(X_{k[\varepsilon]})$, iallfall dimensjonen.

DEF Glatthet vil si : "surj. for alle små surj. i $\underline{\ell}$"

dvs
$$D(S) \xrightarrow[\text{denne surj}]{} D(S') \times_{H_X(S')} H_X(S), \quad 0 \to \mathfrak{a} \to S \to S' \to 0, \quad \mathfrak{a}^2 = 0$$

EKS 1 Hilbert-flag skjema og dens projeksjoner

Gitt lukkede underskjemaer $X \subseteq Z$ av $Y = \mathbb{P}^3$

La $$D(S) = \{ X_S \subseteq Z_S \mid X_S \in H_X(S) \text{ og } Z_S \in H_Z(S) \}$$

$$\begin{aligned} p : D(S) &\longrightarrow H_X(S) \qquad \text{glemmefunktor} \\ (X_S \subseteq Z_S) &\longmapsto (X_S) \end{aligned}$$

Tangentrom og tangentromsavbildn. T_p er gitt ved

cartesisk
$$\begin{tikzcd} T_{D,(X,Z)} \arrow[r] \arrow[d, "T_p"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H^0(N_Z) \arrow[d] \\ H^0(N_X) \arrow[r] & H^0(N_Z|_X) \end{tikzcd}$$

$N_Z \simeq \mathcal{O}_Z(f_1) \oplus \mathcal{O}_Z(f_2)$ hvis Z er et komplett snitt

Brüker at

$$H^1(\mathcal{J}_X(\nu)) = 0 \implies \begin{array}{c} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\nu)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Z(\nu)) \\ \text{denne surj} \searrow \quad \stackrel{0}{\implies} \downarrow \text{surj} \\ H^0(\mathcal{O}_X(\nu)) \end{array}$$

<u>Proposisjon</u> Hvis Z er CI (compl. snitt) of type $(f_1, f_2, \dots, f_s)$, så er p glatt dersom

$$H^1(\mathcal{J}_X(f_i)) = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, s$$

($s = 2$ når vi har kurver i $\mathbb{P}^3$)

$\boxed{\text{Linkage}}$ Hovedpoeng

$\boxed{X \text{ og } X' \text{ er linket dersom } X \cup X' = Z \ (= \text{en CI})}$

Hvis X, X' og Z er kurver i $\mathbb{P}^3$, så er

$$H^1(\mathcal{J}_X(\nu))^\vee \cong H^1(\mathcal{J}_{X'}(f_1 + f_2 - 4 - \nu)) \quad \text{når } Z \text{ er CI av type } (f_1, f_2)$$

<u>Linkage</u> definerer en isomorfi av lokale funktorer

$$\begin{array}{ccc} D_{(X \subseteq Z)} & \xrightarrow{\sim} & D_{(X' \subseteq Z)} \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ H_X & & H_{X'} \end{array}$$

glatt når $H^1(\mathcal{J}_X(f_i)) = 0$, $i = 1, 2$

glatt når $H^1(\mathcal{J}_{X'}(f_i))^\vee = H^1(\mathcal{J}_X(f_{2-i} - 4)) = 0$ for $i = 1, 2$

<u>Corollar</u> Hvis X og X' er linket ved en CI Z av type (f_1, f_2), så er

$$X \text{ uobstr. (hhv generisk)} \iff X' \text{ uobstr (hhv generisk)}$$

dersom $\quad H^1(\mathcal{J}_X(f_i)) = H^1(\mathcal{J}_X(f_i - 4)) = 0 \quad$ for $i = 1, 2$

Ex I Mumfords velkjente eksempel på en ikke-redusert komponent $V \subseteq H(14,24)$, så vil den generiske kurven $(X) \in V$ være obstruert og den oppfyller

$$0 \to R(-9) \to R(-8)^2 \oplus R(-7) \to R(-6)^3 \oplus R(-3) \to I_X \to 0$$

Den oppfyller $H^1(\mathcal{J}_X(v)) = 0$ for $v \notin \{3,4,5\}$

La Z være CI av type $(6,6)$ som inneholder X og la X' være linkete kurven. Etter Cor. så er

X' en generisk obstruert kurve, er glatt av grad $d' = 22$ $\quad (d+d' = 6 \cdot 6 = 36)$

$g' = 56 \quad (g'-g = (d'-d) \frac{6+6-4}{2} = 32)$

Dessuten er $\boxed{\omega_{X'} \simeq \mathcal{O}_{X'}(5) \quad \text{"subcanonical"}}$

X' definerer altså en ikke-redusert komponent i $H(22,56)$ hvor gen. kurve er "subcanonical" og $H^1(\mathcal{J}_{X'}(v)) = 0$ for $v \notin \{3,4,5\}$

$\boxed{\text{FNM}}$ Dette var $\boxed{\text{EKS 1}}$ på Dagens metode og handlet om glatthet av "par (X,Z)" $\xrightarrow[\text{glemme-funktor / projeksjon}]{}$ (X) brukt 2 ganger. Nå Serre-koor. og

$(\mathcal{F},s) \overset{\text{glemme}}{\mapsto} (\mathcal{F})$

$(X,\xi) \xrightarrow[\text{glemme}]{} (X)$

$\boxed{\text{Nå}}$: H.-Serre-korrespondansen og glemmefunktorene:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{F},\sigma) \arrow[r, "\sim", "1-1"'] \arrow[d, "\text{glemme}"'] \arrow[dr, dashed, "q"] & (X,\xi) \arrow[d, "\text{glemme ekstensjonen } \xi"] \\ (\mathcal{F}) & (X) \end{tikzcd}$$

Tar $\boxed{Y = \mathbb{P}^3}$, men det vi gjør fungerer for Y med $\dim Y \geq 2$ under visse betingelser. Hoved-antagelsen er $\underline{\mathcal{F} \text{ av rang } 2}$ og $\underline{X \subseteq Y \text{ codim. } 2}$

Må egentlig se på 4 lokale deform. funktorer

$\mathrm{Def}_{\mathcal{F}}$ og H_X (allerede definert)

$\mathrm{Def}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ og $\mathrm{Def}_{(X,\xi)}$, men sløyfer sistnevnte og ser direkte på funktormorfien q (stiplet over) istedenfor

<u>Def</u>. $\mathrm{Def}_{(\mathcal{F},\sigma)} = \left\{ \mathcal{O}_{\mathbb{P}\otimes S} \xrightarrow{\sigma_S} \mathcal{F}_S \;\middle|\; S\text{-flat}, \sigma_S \otimes_S k = \sigma \right\} /\cong$

Har sekvens

$$\circledast \qquad \boxed{0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_X(c_1) \to 0}$$

$\Rightarrow \exists \quad q : \mathrm{Def}_{(\mathcal{F},\sigma)} \longrightarrow H_X$ gitt ved

$\sigma_S \longmapsto (\operatorname{coker} \sigma_S)(-c_1)$

<u>Teorem</u>

(i) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{J}_X(c_1), \mathcal{F}) =$ tangentrom til $\mathrm{Def}_{(\mathcal{F},\sigma)}$

og $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{J}_X(c_1), \mathcal{F})$ inneholder obstruksjonene

(ii) $p : \mathrm{Def}_{\mathcal{F},\sigma} \xrightarrow{\text{glemme}} \mathrm{Def}_{\mathcal{F}}$ er glatt dersom $H^1(\mathcal{J}_X(c_1)) = 0$

(iii) $q : \mathrm{Def}_{\mathcal{F},\sigma} \to H_X$ er glatt dersom
$$H^1(\mathcal{I}_X(c_1-4)) = 0$$

Videre anta $H^0(\mathcal{O}_P(-c_1)) = 0$, $H^1(\mathcal{I}_X(c_1)) = H^1(\mathcal{I}_X(c_1-4)) = 0$ og at $\mathcal{F}$ er stabilt knippe. Da vil

$$\mathrm{ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F},\mathcal{F}) + h^0(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{N}_X) + h^0(\omega_X(-c_1+4)) \text{ og}$$
$$\dim_{(\mathcal{F})} M(c_1,c_2,c_3) + h^0(\mathcal{F}) = \dim_{(X)} H(d,g) + h^0(\omega_X(-c_1+4))$$

og $\mathcal{F}$ er uobstr. (hhv. generisk) $\iff$ X er uobstr (hhv generisk)

Bevis (i) smart. Tar

(ii) Anvender $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(-,\mathcal{F})$ på ⊛. Får

$$0 \to \underset{\substack{\cong \\ k}}{\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})} \to \underset{\substack{\cong \\ H^0(\mathcal{F})}}{\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}},\mathcal{F})} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})}_{\text{tangentrom}} \to \underset{\substack{\cong \\ H^1(\mathcal{F})}}{\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}},\mathcal{F})} \to$$

hvis stabil

obst. rom

Hvis $H^1(\mathcal{F}) = 0$, så har vi surj. på tangentrom og inj. på obstr. rom $\Longrightarrow$ dvs. får glatthet

Videre er
$$\to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{I}_X(c_1)) \to H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to$$

eksakt, så $\quad H^1(\mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{I}_X(c_1))$ lik 0 pr. antagelse.

(iii) Anvender $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}_X(c_1),-)$ på ⊛. Får

$$\to \underset{\substack{\cong \\ k}}{\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{I}_X(c_1))} \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{I}_X(c_1))}_{\text{tangentrom}}$$
$$\to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_X(c_1),\mathcal{I}_X(c_1))}_{\text{obstr. rom}}$$

Videre

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{J}_X(c_1),\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_X(c_1-4),\omega_{\mathbb{P}}) \underset{\text{(Serre dualitet)}}{\simeq} H^1(\mathcal{J}_X(c_1-4))^\vee$$

$= 0$ per antagelse

og (iii) OK. Merk at

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_X(c_1),\mathcal{O}_{\mathbb{P}})^\vee \simeq H^2(\mathcal{J}_X(c_1-4))^\vee \simeq H^1(\mathcal{O}_X(c_1-4))^\vee = H^0(\omega_X(4-c_1))$$

gir oss fiberdimensjonen når vi trekker ifra -1 og vi får alle dim. formlene til slutt.

(i) Bruker Laudal teori på kategorien

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}$$

av 2 objekter og én ikke-triviell morfi.

Den gir oss tangent (hhv. obstruksj.) rom A^1 (hhv A^2) og en spektralsekvens

$$E_2^{p,q} = \varprojlim{}^{(p)} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^q(\mathcal{F},\mathcal{F}) & & \mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \\ & \searrow^{\alpha^q} \quad \mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}},\mathcal{F}) \quad \swarrow & \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$ konv.

$$A^{p+q}$$

dvs. gitt ved $\boxed{0 \to E_2^{1,i-1} \to A^i \to E_2^{0,i} \to 0}$

der $\underline{E_2^{0,i} = \ker \alpha^i}$ og $\underline{E_2^{1,i-1} = \operatorname{coker} \alpha^i}$

Se på

$$\begin{array}{ccc} E_2^{0,i} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{F}) & \xrightarrow[\alpha^i]{} & \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}},\mathcal{F}) = H^i(\mathcal{F}) \end{array}$$

$\Rightarrow E_2^{0,i} = \ker \alpha^i$, Tilsv $E_2^{1,i-1} = \operatorname{coker} \alpha^{i-1}$, $\underline{\underline{i > 0}}$

$\Longrightarrow$

$$\to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(\mathcal{F}) \to A^2 \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^2} H^2(\mathcal{F})$$

Får, se (ii), at $\boxed{A^2 = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_X(c_1),\mathcal{F})}$

$i = 0$

$$\begin{array}{ccc} E_2^{0,0} & \dashrightarrow & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = k \ni 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha^0} & H^0(\mathcal{F}) \ni \sigma \end{array}$$

så $E_2^{1,0} = \mathrm{coker}\, \alpha^0$ gjelder fortsatt

$$\to \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(\mathcal{F}) \to A^1 \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1}$$

$$\Longrightarrow \quad A^1 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_X(c_1),\mathcal{F})$$

Q.E.D.

La $M = H^1_*(\mathcal{F}) := \bigoplus H^1(\mathcal{J}(\nu))$.

<u>Def</u>. $\mathcal{F}$ kalles arith. CM dersom $M = 0$

(Via Serre-korr. svarer dette til ACM kurver)

<u>Corollar</u> (Miro-Roig)

Alle arith. CM knipper av rank 2 på $\mathbb{P}^3$ er uobstruerte

<u>Bevis</u> Teorem om Serre-korr + Ellingsrud 75

OK

Nå til Buchsbaum knipper på $\mathbb{P}^3$

<u>DEF</u> $\mathcal{F}$ kalles Buchsbaum hvis

$(x_0,x_1,x_2,x_3)\cdot M = 0$. Jfr. for kurver

Now $A \simeq R/I_A$ and

$\mathbb{X} = \mathrm{Proj}\, A \subseteq \mathbb{P}^3$ a curve, deg. d, $\underset{\text{arith.}}{\text{gen.}}$ g

with min. resolution

$$\boxed{0 \to \bigoplus_i R(-i)^{\beta_{3,i}} \longrightarrow \bigoplus_i R(-i)^{\beta_{2,i}} \to \bigoplus_i R(-i)^{\beta_{1,i}} \to I_A \to 0}$$

Put $\boxed{\delta^2(0) = \sum_i (\beta_{1,i} - \beta_{2,i} + \beta_{3,i}) \cdot h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(i))}$

$M = H^1_m(A)$, Hartsh.-Rao mod.

Def M has diameter 1 if

$M_\nu = 0 \quad \forall \nu \neq c$, $M_c \neq 0$ (c an integer)

In this case $\bigoplus_i R(-i)^{\beta_{3,i}} = R(-c-4)^r$

($r := \beta_{3,c+4}$)

Theorem

Suppose diam $M = 1$. Then $\mathbb{X}$ is obstructed (i.e. $\mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^3)$ is not smooth at $(\mathbb{X})$) if and only if

$\beta_{1,c+4} \cdot \beta_{2,c+4} \neq 0$ or $\beta_{1,c} \cdot \beta_{2,c} \neq 0$ or $\beta_{1,c} \cdot \beta_{2,c+4} \neq 0$

If $\mathbb{X}$ is unobstructed, then

$$\dim_{(\mathbb{X})} \mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^3) = 4d + \delta^2(0) + r \cdot (\beta_{1,c+4} + \beta_{2,c})$$

Every irred comp. of $\mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^3)$ which contains a "diam 1 curve", is generically smooth

Let $\mathcal{F}$ be reflexive on $\mathbb{P}^3$, with $M := H^1_*(\mathcal{F})$ of diameter 1, and minimal resolution

$$0 \to \bigoplus R(-i)^{\beta_{3,i}} \to \bigoplus R(-i)^{\beta_{2,i}} \to \bigoplus R(-i)^{\beta_{1,i}} \to F \to 0$$

where $F := H^0_*(\mathcal{F})$ and $\beta_{3,c+4} = r$, $\beta_{3,i} = 0$ for $i \neq c+4$

Put $$\boxed{\delta^2 = \sum_i (\beta_{1,i} - \beta_{2,i} + \beta_{3,i}) \cdot h^2(\mathcal{F}(i))}$$

<u>Corollary</u> $\mathcal{F}$, as above, is obstructed iff

$$\boxed{\beta_{1,c+4} \cdot \beta_{2,c+4} \neq 0 \ \underline{\text{or}}\ \beta_{1,c} \cdot \beta_{2,c} \neq 0 \ \underline{\text{or}}\ \beta_{1,c} \cdot \beta_{2,c+4} \neq 0}$$

Moreover if $\mathcal{F}$ is unobstructed and $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}(-4)) = 0$ then

$$\operatorname{ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \delta^2 + r \cdot (\beta_{1,c+4} + \beta_{2,c}) - {}_0\hom_R(F, H^3_*(\mathcal{F}))$$

and every irred. comp. of $M(c_1, c_2, c_3)$ which contains a diameter 1 sheaf is <u>generically smooth</u>

<u>Bevis</u> Vi benytter oss av hovedteoremet om Serre-korrespondansen, anvendt på

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}(t) \to \mathcal{J}_X(c_1+2t) \to 0 \quad , \quad t \gg 0$$

"Mapping Cone" / horseshoe lemma viser at resolusjonene til $F(t)$ og $\mathcal{J}_X(c_1+2t)$ nesten er identiske".

Example

Let C be the generic obstructed subcanonical curve of $H(22,56)$.

$H^1(\mathcal{J}_C(\nu)) \neq 0 \iff \nu \notin \{3,4,5\}$

$\mathcal{O}_C \simeq \omega_C(-5) = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})(-9)$

Take a global section of $\mathcal{O}_C(3) \Rightarrow$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C(6) \to 0$$

Since
$$H^1(\mathcal{F}) = H^1(\mathcal{J}_C(6)) = 0$$
$$H^1(\mathcal{F}(-4)) = H^1(\mathcal{J}_C(2)) = 0$$
$$H^0(\mathcal{F}(-\tfrac{c_1}{2})) = H^0(\mathcal{J}_C(3)) = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ is a "generic" obstructed sheaf of $M(6,22,66) \simeq M(0,13,66)$. Hence $M(0,13,66)$ contains a <u>non-reduced</u> comp.

<u>Remark</u> Take a section of $\mathcal{O}_C(5) \simeq \omega_C \Rightarrow$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \mathcal{E} \to \mathcal{J}_C(9) \to 0$$

and $\mathcal{E}$ is a vector b. with $c_1 = 5$

$\mathcal{E}$ is stable, $\quad H^1(\mathcal{E}) = H^1(\mathcal{J}_C(9)) = 0$

$\qquad H^1(\mathcal{E}(-4)) = H^1(\mathcal{J}_C(5)) \simeq k \neq 0$

so the Thm does not apply. [In fact $c_1(\mathcal{F}(-5)) = -1$, $c_2(\mathcal{F}(-5)) = 2$ has a gen. smooth irred moduli space]